Octavian G. Mustafa

EDO 54: un set de exerciţii uşoare

Soluţii de ecuaţii diferenţiale ordinare



Publicaţiile DAL
Craiova

Fişier prelucrat în data de [November 14, 2026]

Avertisment

Acest eseu nu a fost raportat vreunui referent. În consecinţă, conţinutul său trebuie considerat "ca atare."

Autorul vă aşteaptă comentariile la adresa lui de e-mail[1] şi vă mulţumeşte anticipat pentru efortul depus.

Fiecare proiect de la *Publicaţiile DAL* trebuie considerat "şantier" dacă nu este declarat altfel. Versiunea sa este cea a datei de pe pagina cu titlul.

Craiova, Mai 18, 2015 *O.G.M.*

[1] octawian@yahoo.com

Prefaţă

Ecuaţiile diferenţiale ordinare servesc la *modelarea* unor fenomene din natură şi din societate, atunci când *evoluţia* (variaţia *în timp* a) caracteristicilor (ori a *parametrilor*) fenomenelor în cauză se presupune a fi *continuă*. Curgerea în jet a apei de la robinet este un astfel de fenomen care se desfăşoară *fără pauză* prin comparaţie cu apariţia unor picături răzleţe de ploaie, sub bătaia vântului, pe parbriz.

În fizică sunt întrebuinţate frecvent aşa-numitele *modele de jucărie* — sau modele *de notat pe un şerveţel* — la familiarizarea cititorului cu interpretarea experimentelor. Mai mult chiar, *se începe* cu evoluţii discrete [22, pag. 3]. Din motive similare, ne preocupăm de ecuaţii "mărunte", precum

$$x' = x, \quad x' = x^2 + 1, \quad x' = -\sqrt{\frac{x}{t}},$$

pe care le plasăm în *contexte* variate şi cărora ne străduim să le desluşim *subtilităţile*.

Pentru a avea *utilitate*, soluţiile ecuaţiilor diferenţiale trebuie să provină din *probleme bine-puse*, adică din dublete alcătuite dintr-o ecuaţie şi, în cazul ecuaţiilor *de ordinul întâi*, dintr-o pereche de *date impuse*. Astfel, chiar dacă putem afla numerele trenurilor care pleacă înspre Bucureşti din gara Craiovei în fiecare zi de luni, ne interesează care este *numărul* trenului ce va porni către capitală la *ora şase dimineaţa*: am impus perechea de date — un oraş şi un moment de timp —.

Mecanica clasică (newtoniană) constituie sursa principală de ecuaţii diferenţiale ordinare. Ea este *deterministă*, adică putem afla *unde s-a găsit* (indiferent când, în trecut) şi *unde se va găsi* (oricând, în viitor) un obiect aflat în mişcare perpetuă, de îndată ce construim problema formată din *legea mişcării* (ecuaţia diferenţială) şi din *caracteristicile dinamice* (datele impuse) ale obiectului la momentul de timp în care *începem* să-l urmărim. De aceea, s-a încetăţenit practica de a ne referi la datele impuse ca la nişte *date iniţiale* — pentru experimentul nostru, însă nu pentru mişcarea obiectului studiat! —. În discuţia care urmează vom apela, raportat la context, datele impuse în moduri diferite: date *Cauchy*, date *iniţiale*, date *finale*, date *pe frontieră* ori date *la limită*. Asemenea deosebiri sunt întâlnite adesea în literatura internaţională.

Am căutat să evidenţiez *transformările de variabile* — trecerea la ecuaţia $x' = 1$ înseamnă *rectificarea* (unor mărimi specifice ale) fenomenului investigat, utilizarea ecuaţiei $x' = x$ presupune *adimensionalizarea* fenomenului ş.a.m.d. —, respectiv aspectele relative la *geometria curbelor,* una din beneficiarele esenţiale ale teoriei ecuaţiilor diferenţiale ordinare.

Acest material conţine fragmente de rezolvări ale unor exerciţii şi comentarii privitoare la ecuaţiile de ordinul întâi uzuale: ecuaţia *liniară* (omogenă, respectiv perturbată), ecuaţia *cu variabile separabile* şi ecuaţiile *exprimate prin diferenţiale*. Poate fi întrebuinţat ca auxiliar la un curs de ecuaţii diferenţiale ordinare.

Porţiuni ale lucrării de faţă au fost prezentate studenţilor Universităţii din Craiova, de la specializarea *matematică informatică*, participanţi la cursul EDI (Ecuaţii diferenţiale I).

Craiova, [November 14, 2026] *O.G.M.*

Cuprins

1 Ecuaţii diferenţiale liniare, de ordinul întâi 1

2 Unelte şi auxiliare: inegalităţi integrale şi diferenţiale, chestiunea unicităţii şi cea a perturbaţiei, funcţii Lipschitz 15

3 Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiilor pentru problemele Cauchy ale ecuaţiilor diferenţiale, de ordinul întâi 29

4 Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile, de ordinul întâi 45

5 Ecuaţii exprimate cu diferenţiale, de ordinul întâi 59

A Teorema de inversiune locală în $\mathbb{R}$ 83

Referinţe Bibliografice 91

Index 93

Lista de Figuri

3.1 *Echivalenţa normelor în plan:* norme diferite, deşi produc bile de *forme diferite*, conduc la *aceeaşi* topologie. Interioarele celor două pătrate, cu laturile a, b portocalii şi centrul de simetrie $M(t_0, x_0)$, desemnează bile în topologia dată de norma $\| \star \|_\infty$. Interiorul discului de rază (portocalie) ε şi de centru M este o bilă în topologia dată de norma $\| \star \|_2$. 29

3.2 **a)** *Parchetarea unei încăperi*: cum să reduci la un număr finit de discuri albastre o acoperire deschisă oarecare a unui planşeu dreptunghiular. **b)** Fiecare punct al *planşeului,* fiind element al măcar unui disc, îi va fi *centru de simetrie* unui dreptunghi albastru având laturile paralele cu axele de coordonate şi care este inclus în discul respectiv. Intersecţia cu dreptunghiul podelei a oricărei drepte a planului acesteia care să fie paralelă cu axa de coordonate *orizontală* este fie mulţimea vidă fie un segment închis orizontal ce va fi acoperit de un număr finit de astfel de dreptunghiuri, ale căror centre de simetrie se găsesc pe el. Alegând *cea mai mică înălţime* a acestor dreptunghiuri, le restrângem la o mulţime finită de dreptunghiuri portocalii, (unele) nedisjuncte, toate de aceeaşi înălţime. **c)** Am construit astfel o *bandă dreptunghiulară* portocalie care acoperă o zonă de lăţimea întregii podele. În plus, dată fiind reducerea lor în dimensiune, dreptunghiurile benzii sunt incluse într-un număr finit de discuri (nedesenate). Observăm că una din muchiile laterale ale încăperii este acoperită cu dreptunghiuri albastre, câte unul din fiecare bandă. Putem, astfel, alege un număr finit de asemenea dreptunghiuri: benzile lor acoperă, în întregime, podeaua. Alegând câte un singur disc pentru fiecare dreptunghi al acestei acoperiri, găsim *subacoperirea finită* cu discuri a planşeului. . 31

3.3 Fiecare segment (desenat) din domeniul Ψ reprezintă *graficul* unei soluţii. În portocaliu este graficul soluţiei dată de corespondenţa $t \mapsto t - t_0$, unde $t \in [t_0, t_0 + 1)$. 41

3.4 Graficele soluţiilor ecuaţiei $x' = x^2$, atunci când *intersectează* axa verticală Ox, o pot face doar *deasupra* punctului A. 43

4.1 Fiecare arc de curbă (colorat în albastru) din domeniul Ψ reprezintă *graficul* unei soluţii. Şi prin punctul V trece graficul unei asemenea soluţii, însă fără a putea "ieşi" din arcul subîntins de segmentul cu capetele $(a,0)$ şi $(0,a)$ al *parabolei* portocalii de ecuaţie $(t-a)^2+(x-a)^2-2tx=a^2$. Ecuaţia arcului este $\sqrt{t}+\sqrt{x}=\sqrt{a}$. Pentru a se afla pe parabolă, fie *deasupra* lui $(0,a)$ fie *la dreapta* lui $(a,0)$, puncte din graficul său, soluţia $x=x(t)$ ar trebui să fie strict crescătoare! Aici, $V\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ este *vârful* parabolei, $F\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ *focarul* ei iar dreapta OF prima bisectoare. Reperul cartezian $Ot'x'$, figurat în gri, este rotit cu 45° în sens *invers trigonometric* faţă de reperul Otx. 54

5.1 Linia punctată care trece prin M_0 îi este *tangentă* în acest punct curbei figurate cu linie continuă. Punctele A, B, C se găsesc pe respectiva tangentă iar segmentele MA, MB, MC sunt *mereu* verticale. 60

5.2 În imagine este ilustrat graficul funcţiei f pentru $m := 2, a := 5\times 10^5, b := 20$. 62

5.3 Graficul figurat în portocaliu, G_y, îi aparţine *prelungirii* funcţiei y pe intervalul *maximal* de existenţă ca soluţie a unei probleme Cauchy. K este *cutia* de centru (x_0,y_0) şi de dimensiuni $(2a)\times(2b)$ în interiorul căreia y are existenţa garantată. D este discul (bila B^2) centrat în M_0 unde funcţia $\frac{\partial U}{\partial y}$ nu se anulează nicăieri. Dreptele τ şi ν desemnează *tangenta,* respectiv *normala* la graficul G_y, trasate prin M_0. Γ reprezintă curba de ecuaţie $U(x,y)=0$ care include graficul G_y. 66

5.4 În cutia K sunt figurate trei *linii poligonale,* de câte două segmente fiecare, având segmentele componente paralele cu axele reperului Oxy: drumurile *(1)* şi *(2)* "leagă" între ele punctele $M_0(x_0,y_0)$ şi $M(x,y)$ iar drumul *(3)* punctele $M_1(x_1,y_1)$ şi M. Deasupra lor se află ilustraţia unei mulţimi deschise Ψ care este *poligonal conexă* [17, pag. 232]: adică, putem "călători" între orice două puncte ale unei asemenea mulţimi urmând (cel puţin) o linie poligonală cu număr *finit* de segmente componente, situată *în mulţime* şi având fiecare din segmente *paralel* cu (câte una din) axele de coordonate. Pe astfel de mulţimi se introduc versiuni ale formulei (5.17) [17, pag. 188]. 68

5.5 Avem punctele $M_0(1,1)$, $M_1\left(-\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $N_0\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ şi $V\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Curba Γ este *elipsa* de *centru V* având dreapta Δ, de ecuaţie $y=x+\frac{2}{3}$, ca axă (longitudinală) de simetrie. Elipsa este determinată de perechea de *raze conjugate* $\overrightarrow{VM_0}$ şi $\overrightarrow{VN_0}$. Dreapta τ, de ecuaţie $x=1$, îi este *tangentă* elipsei în M_0 iar dreapta τ', de ecuaţie $x=-\frac{5}{3}$, în M_1. Arcul de elipsă G_y, colorat în portocaliu, este graficul soluţiei de la punctul *2)*. 76

Capitolul 1
Ecuaţii diferenţiale liniare, de ordinul întâi

Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ o submulţime nevidă a *spaţiului euclidian,* în care lucrăm raportat la reperul cartezian $Otxy$, şi funcţia $F : \Omega \to \mathbb{R}$. În cele ce urmează, Ω şi F vor fi dotate cu proprietăţi semnificative: Ω va fi (de obicei, cel puţin) deschisă în *topologia* uzuală din $\mathbb{R}^3$, F va admite (măcar) derivate parţiale de ordinul întâi continue în raport cu ansamblul celor trei argumente ale sale ş.a.m.d.

Formula matematică

$$F(t,x,x') = 0 \tag{1.1}$$

desemnează o *ecuaţie diferenţială ordinară,* de *ordinul întâi,* în contextul unei probleme de analiză matematică în care ne interesează găsirea unei funcţii $x : I \to \mathbb{R}$, de[1] *clasă* C^1, numită *soluţie* a ecuaţiei (1.1), care să satisfacă egalitatea

$$F\left(t,x(t),x'(t)\right) = 0 \quad \text{pentru orice } t \in I. \tag{1.2}$$

Aici, I este un interval (de obicei, deschis) de numere reale iar $x'(t)$ derivata (*ordinară* a) lui x în punctul t. Se utilizează şi notaţiile $\frac{dx}{dt}(t)$, $\frac{d}{dt}[x(t)]$, respectiv $\dot{x}(t)$ — provenită din *mecanica* newtoniană — pentru a ne referi la această derivată.

Formula (1.1), în care **nu sunt exprimate** argumentele funcţiilor x, x', constituie scrierea *prescurtată*, uzuală, a ecuaţiei diferenţiale (1.2). Argumente de natură geometrică [21, pag. 27] fac scrierea prescurtată a unei ecuaţii preferabilă celei detaliate.

În formula (1.1) mărimile t, x par să aibă aceeaşi semnificaţie: ele sunt primele două *variabile* (argumente) ale funcţiei F. Semnul tipografic *accent* ($'$ ori $\cdot$) ne indică faptul că t este variabila *independentă* — adică, *liberă* să primească drept valoare *orice* număr [13, pag. 33] din intervalul I — pe când x reprezintă variabila *dependentă* (de t) sau *funcţia* (căutată) [13, pag. 46].

Exerciţiul 1.1. Fie $t_0 < t_1, t_2 \neq t_3$ numere reale fixate şi $t_{2,3} \in (t_0,t_1)$. Fie funcţia $p : (t_0,t_1) \to \mathbb{R}$ continuă şi verificând următoarea *condiţie de semn*:

[1] Sau *continuu-diferenţiabilă* [20, pag. 176], adică *derivabilă* pe I şi având (funcţia-)derivată *continuă* pe I.

$$(t-t_2)\cdot p(t)>0 \quad \text{pentru orice } t\neq t_2. \tag{1.3}$$

Atunci, nu există nicio soluţie $x:(t_0,t_1)\to\mathbb{R}$ a ecuaţiei diferenţiale

$$x'+p(t)\cdot x=0$$

astfel încât

$$x(t_2)=0, \quad x(t_3)\neq 0. \tag{1.4}$$

Soluţia exerciţiului 1.1. Presupunem, prin reducere la absurd, că o atare soluţie x există[2].

Cazul $t_2<t_3$. Funcţia p, fiind continuă, are *proprietatea valorii intermediare* (Darboux): $p(t_2)=0$. Observăm şi că

$$\frac{d}{dt}\left\{[x(t)]^2\right\}=-2p(t)\,[x(t)]^2\leq 0, \quad t\in[t_2,t_1),$$

adică funcţia x^2, dată de corespondenţa $t\mapsto[x(t)]^2$, este descrescătoare nestrict *la dreapta lui* t_2.

Introducem mulţimea $T=\{t\in[t_2,t_3]\,|\,x(t)=0\}$. Evident, ea este nevidă: $t_2\in T$. Fie[3] $t^\star:=\sup T$. Atunci, $t^\star\leq t_3$.

Dacă T este finită, avem $t^\star\in T$. Altfel, există şirul strict crescător $(t_n)_{n\geq 4}\subset T$ cu $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=t^\star$. Pe baza continuităţii lui x, deducem că $0=\lim\limits_{n\to+\infty}x(t_n)=x(t^\star)$, de unde $t^\star\in T$. Aşadar, intervalul $(t^\star,t_3]$ este nevid şi restricţia funcţiei x^2 la acest interval este strict descrescătoare.

Funcţia x^2, continuă, are proprietatea valorii intermediare: există numărul $t_D\in(t^\star,t_3)$ pentru care

$$[x(t_D)]^2=\frac{[x(t_3)]^2}{2}<[x(t_3)]^2,$$

ceea ce contrazice monotonia strictă a lui x^2, infirmând presupunerea iniţială.

Cazul $t_3<t_2$. La fel ca anterior, mulţimea $T=\{t\in[t_3,t_2]\,|\,x(t)=0\}$ este nevidă şi $t_\star:=\inf T\in T$, respectiv restricţia funcţiei x^2 la intervalul nevid $[t_3,t_\star)$ este strict crescătoare.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

---

[2] Exerciţiul 1.10 ne permite să renunţăm la ipoteza (1.3). Atunci, care ar fi *rostul* exerciţiului de faţă? Ei bine, raţionamentul din soluţia sa funcţionează *verbatim* şi pentru ecuaţia *neliniară* $x'+p(t)\cdot f(x)=0$, unde funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă şi supusă, ea însăşi, unei *condiţii de semn*: $u\cdot f(u)>0$ pentru orice $u\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

[3] Întrebuinţăm operatorul *morsă* := la *definiri* de obiecte matematice: `nume := valoare`. Astfel, unui nume i se *atribuie* o valoare.

Exerciţiul 1.2. Fie funcţia $p : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ continuă, verificând condiţia de semn (1.3), şi problema cu *dată impusă*[4]

$$\begin{cases} x' + p(t)x = 0, \\ x(t_2) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.5}$$

unde $t_2 \in (t_0, t_1)$ este fixat. Atunci, problema va admite cel mult o soluţie $x : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$.

Soluţia exerciţiului 1.2. Presupunem că ar exista două asemenea soluţii (distincte), $x_{1,2}$.

Observăm că diferenţa lor, notată cu x, ar fi o soluţie a ecuaţiei diferenţiale din problema (1.5) care să îndeplinească restricţiile (1.4). Astfel, conform Exerciţiului 1.1, ea nu ar putea exista.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 1.3. Fie funcţia $p : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ continuă şi problemele cu date impuse

$$\begin{cases} x' + p(t)x = 0, \\ x(t_2) = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' - p(t)y = 0, \\ y(t_2) = y_0, \end{cases}$$

unde $t_2 \in (t_0, t_1)$ şi $x_0, y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sunt fixate. Dacă $x, y : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ sunt soluţii ale celor două probleme, calculaţi punctele de intersecţie ale curbei formate de punctele $M(x(t), y(t))$ în planul Oxy cu dreapta de ecuaţie

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1.$$

Soluţia exerciţiului 1.3. Observăm că

$$[x(t) \cdot y(t)]' = 0, \quad t \in (t_0, t_1),$$

deci punctele M se vor găsi pe una — singură[5] — din ramurile hiperbolei echilatere $xy = x_0 y_0$.

Dreapta, dată prin tăieturi, îi este tangentă acestei hiperbole în punctul $M_0(x_0, y_0)$.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 1.4. Fie funcţiile $p, q : (t_0, +\infty) \to (0, +\infty)$ continue şi $x : (t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ o soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$x' + p(t)x = q(t)$$

astfel încât $x(t_2) > 0$, unde $t_2 > t_0$ este fixat. Atunci, sunt valabile inegalităţile

[4] În teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare se întâlnesc probleme (cu date) *iniţiale*, probleme *finale*, probleme *Cauchy*, probleme *la limită* ş.a.m.d. Deoarece data impusă (t_2, x_0) îi este punct *interior* proiecţiei pe planul Otx a mulţimii Ω, problema de faţă constituie o problemă Cauchy.

[5] Fiind netede, soluţiile x, y au proprietatea valorii intermediare, deci punctele M nu pot "sări" de pe o ramură a hiperbolei pe cealaltă.

$$x(t) > 0, \quad \frac{1}{x(t)} \leq \frac{1}{x(t_2)} + \int_{t_2}^{t} \frac{[p(s)]^2}{4q(s)} ds$$

pentru orice $t \in [t_2, +\infty)$.

Soluţia exerciţiului 1.4. Funcţia x fiind continuă, există $t_3 > t_2$ (t_3 poate fi chiar $+\infty$) cu proprietatea că

$$x(t) > 0, \quad t \in [t_2, t_3).$$

Ea îi este soluţie următoarei reformulări a ecuaţiei diferenţiale din enunţ:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' + q(t) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = p(t) \cdot \frac{1}{x}.$$

Mai precis, ecuaţia diferenţială *neliniară*[6]

$$y' + q(t)y^2 = p(t)y$$

admite soluţia $y : [t_2, t_3) \to (0, +\infty)$ cu formula $y(t) = \frac{1}{x(t)}$ pentru orice $t \in [t_2, t_3)$.

Observăm că

$$\begin{aligned} y'(t) &= -q(t) \left[y(t) - \frac{p(t)}{2q(t)} \right]^2 + \frac{[p(t)]^2}{4q(t)} \\ &\leq \frac{[p(t)]^2}{4q(t)}, \quad t \geq t_2, \end{aligned}$$

de unde, prin integrare în ambii membri ai inegalităţii, deducem că

$$y(t) \leq y(t_2) + \int_{t_2}^{t} \frac{[p(s)]^2}{4q(s)} ds, \quad t \in [t_2, t_3).$$

Dacă $t_3 < +\infty$, atunci t_3 este o mărime *finită*. Estimarea anterioară implică

$$\sup_{t \in [t_2, t_3)} y(t) \leq y(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} \frac{[p(s)]^2}{4q(s)} ds < +\infty,$$

adică $x(t_3) > 0$. Reluăm argumentaţia cu t_3 în *rolul* lui t_2.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 1.5. *([21, Observaţia 2, pag. 41])* Fie numerele reale $P \neq 0$ şi Q fixate. Dacă funcţia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, îi este soluţie ecuaţiei diferenţiale

$$x' + P \cdot x = Q,$$

atunci să se calculeze $\frac{dy}{ds}$, unde

[6] O astfel de ecuaţie face parte din clasa *ecuaţiilor Bernoulli*.

$$\begin{cases} s = s(t,x) = \mathrm{e}^{Pt}, \\ y = y(t,x) = x \cdot s. \end{cases} \tag{1.6}$$

Soluţia exerciţiului 1.5. Folosind regula de derivare a *funcţiilor compuse* şi *teorema de inversiune locală* — vezi Anexa A —

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{P\mathrm{e}^{Pt}} \cdot \frac{d}{dt}[x(t)s(t)] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-Pt}}{P} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \mathrm{e}^{Pt} + x \cdot P\mathrm{e}^{Pt} \right) \\ &= \frac{1}{P} \left(\frac{dx}{dt} + Px \right) \\ &= \frac{Q}{P}. \end{aligned}$$

Schimbarea de variabile

$$(s,y) \quad \Longleftrightarrow \quad (t,x)$$

are determinantul [16, pag. 650]

$$\begin{aligned} \frac{D(s,y)}{D(t,x)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial x} \end{vmatrix} (t,x) = \begin{vmatrix} P\mathrm{e}^{Pt} & 0 \\ xP\mathrm{e}^{Pt} & \mathrm{e}^{Pt} \end{vmatrix} \\ &= P\mathrm{e}^{2Pt} \neq 0. \end{aligned}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 1.6. Fie funcţia $p : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci, singura soluţie $x : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei diferenţiale

$$x' + p(t) \cdot x = 0$$

pentru care

$$x(t_0) = 0$$

este soluţia identic nulă. Aici, $t_0 < t_1$ sunt numere reale fixate.

Soluţia exerciţiului 1.6. Pentru a păstra ecuaţia diferenţială pe *frontiera* $\{t_0,t_1\}$ a domeniului de definiţie al *coeficientului* p se folosesc derivatele *laterale* [16, pag. 250] ale prezumtivelor soluţii x.

Fie x o soluţie care se anulează în punctul t_0. Conform *teoremei Leibniz-Newton* [16, pp. 412–413],

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds \\ &= x(t_0) - \int_{t_0}^{t} p(s)x(s)ds, \end{aligned}$$

de unde

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |p(s)| \cdot |x(s)|ds, \quad t \in [t_0, t_1],$$

respectiv

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + \left[\int_{t_0}^{t} |p(s)|ds\right] \cdot \sup_{\xi \in [t_0,t]} |x(\xi)|, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Fie $t_2 \in (t_0, t_1]$ cu proprietatea că[7] $\int_{t_0}^{t_2} |p(s)|ds \leq \frac{1}{2}$. De aici,

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + \frac{1}{2} \cdot \sup_{\xi \in [t_0,t]} |x(\xi)|, \quad t \in [t_0, t_2], \tag{1.7}$$

respectiv

$$\sup_{\xi \in [t_0,t_2]} |x(\xi)| \leq 2 \cdot |x(t_0)| = 0.$$

Cu alte cuvinte, o soluţie care se anulează în t_0 va fi identic nulă pe un *mic* interval închis, situat la dreapta lui t_0.

Dacă $t_2 < t_1$, reluăm argumentaţia anterioară cu t_2 în rolul lui t_0. A (mai) rămas de răspuns la următoarea întrebare: *putem ajunge la t_1 într-un număr finit de paşi?* Adică, îl putem *acoperi* pe $[t_0, t_1]$ cu un număr finit de asemenea mici intervale pe care să fie identic nulă soluţia?

Introducem o prelungire continuă, $\overline{p} : [t_3, t_4] \to \mathbb{R}$, a funcţiei p:

$$\overline{p}(t) = \begin{cases} p(t_0), & t \in [t_3, t_0), \\ p(t), & t \in [t_0, t_1], \\ p(t_1), & t \in (t_1, t_4], \end{cases}$$

unde $t_3 := t_0 - 1, t_4 := t_1 + 1$.

Fiind continuă pe o mulţime compactă (*teorema Borel-Lebesgue* [16, pag. 57]), funcţia $R : [t_3, t_4] \to \mathbb{R}$ dată prin corespondenţa

$$r \longmapsto \int_{t_0}^{r} |\overline{p}(s)|\, ds$$

[7] Aplicaţia $t \in [t_0, t_1] \mapsto \int_{t_0}^{t} |p(s)|ds$ este continuă, crescătoare nestrict şi ia valoarea 0 în punctul $t = t_0$.

este *uniform continuă* ([16, pag. 238]; *teorema Heine-Cantor* [20, pag. 131]). Deci, există numărul $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ pentru care

$$\int_{\min\{r_1,r_2\}}^{\max\{r_1,r_2\}} |\overline{p}(s)|\, ds = |R(r_1) - R(r_2)| \leq \frac{1}{2}$$

oricare ar fi numerele $r_{1,2} \in [t_3,t_4]$ cu proprietatea că $|r_1 - r_2| \leq \delta$.

Introducem familia de intervale $\{I_t \,|\, t \in [t_0,t_1]\}$, unde

$$I_t = \left(t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2}\right).$$

Evident, dacă $r_1 < r_2$ sunt elemente ale unui astfel de interval, atunci

$$\int_{r_1}^{r_2} |\overline{p}(s)|\, ds \leq \frac{1}{2}.$$

Intervalele formează o *acoperire deschisă* a intervalului $[t_0,t_1]$, care este compact:

$$[t_0,t_1] \subsetneq \bigcup_{t\in[t_0,t_1]} I_t = \left(t_0 - \frac{\delta}{2}, t_1 + \frac{\delta}{2}\right) \subsetneq [t_3,t_4].$$

Aşadar, există mulţimea finită $\{t_5,t_6,\cdots,t_m\} \subset [t_0,t_1]$, cu $m \geq 5$ număr natural, pentru care

$$[t_0,t_1] \subsetneq \bigcup_{k=5}^{m} I_{t_k}.$$

Renumerotând, eventual, elementele mulţimii finite, putem presupune că $t_0 \leq t_5 < t_6 < \cdots < t_m \leq t_1$.

În sfârşit, rolul lui t_2 va fi jucat fie de t_5 (dacă $t_5 > t_0$) fie de t_6. Ajungerea la t_1, ca punct în care se anulează soluţia x, se va realiza în cel mult $m-3$ paşi. Aceasta deoarece micile intervale pe care, folosind *inducţia matematică,* vom dovedi că x este identic nulă sunt

$$[t_i,t_{i+1}], \quad 5 \leq i \leq m-1,$$

la care se vor adăuga $[t_0,t_5]$, dacă $t_0 < t_5$, respectiv $[t_m,t_1]$, dacă $t_m < t_1$. Aici,

$$0 < t_{i+1} - t_i < \delta$$

deoarece $I_{t_i} \cap I_{t_{i+1}} \neq \emptyset$ pentru orice i.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 1.7. *([21, Observaţia 4, pag. 42])*

1) Rezolvaţi ecuaţia diferenţială

$$x' = x. \tag{1.8}$$

2) Fie funcţia $a : (t_0,t_1) \to (0,+\infty)$ continuă şi $A : (t_0,t_1) \to (t_2,t_3)$ o primitivă a sa. Aici, $t_0 < t_1, t_2 < t_3$ sunt numere reale fixate. Se dă $x : (t_0,t_1) \to \mathbb{R}$ soluţie a ecuaţiei diferenţiale ordinare, *liniară şi omogenă*,

$$x' = a(t) \cdot x. \tag{1.9}$$

Calculând $\frac{dy}{ds}$, unde

$$\begin{cases} s = s(t,x) = A(t), \\ y = y(t,x) = x, \end{cases}$$

rezolvaţi ecuaţia (1.9).

3) Fie funcţia $b : (t_0,t_1) \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, şi ecuaţia diferenţială

$$x' = x + b(t) - b'(t).$$

Fiind dată schimbarea de variabile

$$\begin{cases} s = s(t,x) = t, \\ y = y(t,x) = x + b(t), \end{cases}$$

calculaţi $\frac{dy}{ds}$.

4) Rezolvaţi ecuaţia diferenţială

$$x' = x + \sin t$$

utilizând punctul *3)*.

Soluţia exerciţiului 1.7. *1)* Folosim Exerciţiul 1.5: $P := -1$, $Q := 0$. Ecuaţia devine

$$\frac{dy}{ds} = 0,$$

având drept soluţii toate funcţiile *constante* $y : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. De aici, familia de funcţii $\{x_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$, unde

$$x_C(t) = C \cdot \mathrm{e}^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

conţine numai soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (1.8).

Adaptând concluzia Exerciţiului 1.2 la contextul Exerciţiului 1.6, concludem că *acestea sunt toate soluţiile* (posibile ale) *ecuaţiei diferenţiale.*

2) $\frac{dy}{ds} = y$, deci toate soluţiile ecuaţiei (1.9) sunt exprimate de formula matematică

$$x = C \cdot \mathrm{e}^{A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aici, $\frac{D(s,y)}{D(t,x)}(t,x) = a(t) \neq 0$.

3) $\frac{dy}{ds} = y$, $\frac{D(s,y)}{D(t,x)}(t,x) = 1$.

4) Întrebuinţăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} s = s(t,x) = t + \frac{\pi}{4}, \\ y = y(t,x) = x. \end{cases}$$

Astfel,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= x + \sin t = x + \sin\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= x + \sin(s) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos(s) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin s - \frac{d}{ds}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin s\right) \\ &= y + b(s) - b'(s). \end{aligned}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 1.8. *1)* Rezolvaţi ecuaţia diferenţială

$$x' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{t}.$$

2) Se dă funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, cu $[\varphi'(u)]^2 > 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}$. Rezolvaţi ecuaţia diferenţială

$$\varphi'(x) \cdot x' = \frac{\sqrt{1 + [\varphi(x)]^2}}{t}.$$

Cazuri particulare: $\varphi_1(x) = -x$, $\varphi_2(x) = x + \mathrm{e}^x$ ş.a.m.d.

Soluţia exerciţiului 1.8. *1)* Observăm că derivata unei soluţii x oarecare nu este nicăieri nulă. Atunci, apelând la teorema de inversiune locală, *răsturnăm* ecuaţia diferenţială [21, pag. 23], adică ne preocupăm de găsirea unor soluţii $t : J \to \mathbb{R}$, unde J desemnează un interval (de obicei) deschis de numere reale, ale ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot t. \tag{1.10}$$

Pe baza Exerciţiului 1.7, punctul *2)*, unde funcţia $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de formula

$$A(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

deducem că soluţiile $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ale ecuaţiei (1.10) au expresia:

$$t = C \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

respectiv

$$x = \frac{t}{2C} - \frac{C}{2t}.$$

2) Procedând la fel ca la punctul *1)*, ajungem la

$$t = C \cdot \left\{ \varphi(x) + \sqrt{1 + [\varphi(x)]^2} \right\}, \quad C \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

respectiv la

$$\varphi(x) = \frac{t}{2C} - \frac{C}{2t}. \tag{1.11}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 1.9. Fie funcţiile $p, q : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ continue, unde $-\infty \leq t_0 < t_1 \leq +\infty$, şi ecuaţia diferenţială ordinară, *liniară şi neomogenă*,

$$x' + p(t) \cdot x = q(t). \tag{1.12}$$

1) Dacă $x_1 : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ este o soluţie cunoscută a ecuaţiei (1.12), atunci transformaţi ecuaţia folosind schimbarea de variabile

$$\begin{cases} s = s(t,x) = t, \\ y = y(t,x) = x - x_1(t). \end{cases}$$

2) ([21, pag. 40]) Dacă $x_{1,2} : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ sunt soluţii cunoscute (distincte) ale ecuaţiei (1.12), atunci arătaţi că familia de funcţii $\{x_C : (t_0, t_1) \to \mathbb{R} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$ exprimate prin formula

$$x_C(t) = x_1(t) + C \cdot [x_2(t) - x_1(t)], \quad t \in (t_0, t_1),$$

conţine toate soluţiile ecuaţiei diferenţiale (1.12).

3) ([21, Observaţia 3, pag. 41]) Se dă familia de funcţii $\{x_C : (t_0, t_1) \to \mathbb{R} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$ cu formula

$$x_C(t) = \varphi(t) + C \cdot \psi(t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Aici, $\varphi : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ şi $\psi : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sunt funcţii de clasă C^1 cunoscute. Stabiliţi că această familie este constituită din toate soluţiile unei ecuaţii diferenţiale ordinare, liniară şi neomogenă.

4) Rezolvaţi ecuaţia diferenţială

$$x' = \frac{x-1}{t-1}$$

folosind punctul *2)*.

Soluţia exerciţiului 1.9. *1)* $\frac{dy}{ds}+p(s)y=0$ şi $\frac{D(s,y)}{D(t,x)}(t,x)=1$.

2) Pe baza punctului *1)*, observăm că funcţia

$$t\in(t_0,t_1)\longmapsto x_2(t)-x_1(t)$$

îi este soluţie *părţii liniare şi omogene* a ecuaţiei (1.12), adică ecuaţiei

$$x'+p(t)\cdot x=0.$$

Adaptând Exerciţiul 1.6, deducem că ea nu se anulează nicăieri.

Introducem data impusă $(t_2,x_0)\in(t_0,t_1)\times\mathbb{R}$. Atunci, apelând la reformularea Exerciţiului 1.2 pentru ecuaţiile diferenţiale liniare şi neomogene, concludem că ecuaţia (1.12) poate avea cel mult o (singură) soluţie $x:(t_0,t_1)\to\mathbb{R}$ care să accepte data impusă: $x(t_2)=x_0$. Fie

$$C_\star:=\frac{x_0-x_1(t_2)}{x_2(t_2)-x_1(t_2)}. \tag{1.13}$$

Soluţia căutată este $x_{C_\star}$.

3) Plecând de la $0=\frac{d}{dt}(C)=\frac{d}{dt}\left[\frac{x_C(t)-\varphi(t)}{\psi(t)}\right]$, ajungem la

$$x_C'+p(t)\cdot x_C=q(t),$$

unde

$$p(t)=-\frac{\psi'(t)}{\psi(t)},\quad q(t)=\varphi'(t)+\varphi(t)\cdot p(t),\quad t\in(t_0,t_1).$$

4) Avem $p(t)=q(t)=-\frac{1}{t-1}$, respectiv $x_1(t)=1, x_2(t)=t$ pentru orice $t\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Soluţiile au formula matematică

$$x=1+C\cdot(t-1),\quad C\in\mathbb{R}.$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 1.10. *1)* Fie funcţiile $p,q:(t_0,t_1)\to\mathbb{R}$ continue, unde $t_0<t_1$ sunt numere reale fixate, şi $P:(t_0,t_1)\to\mathbb{R}$ o primitivă cunoscută a lui p. Atunci, ecuaţia diferenţială

$$x'+p(t)\cdot x=q(t)$$

se poate rescrie ca

$$[r_P(t)\cdot x]'=u_P(t),$$

unde funcţiile $r_P, u_P:(t_0,t_1)\to\mathbb{R}$ au formulele

$$r_P(t)=\mathrm{e}^{P(t)},\quad u_P(t)=q(t)\cdot r_P(t),\quad t\in(t_0,t_1).$$

2) Fie $t_2 \in (t_0,t_1)$ fixat şi $P_{t_2} : (t_0,t_1) \to \mathbb{R}$ acea primitivă a lui p care se anulează în t_2. Atunci, funcţia $x_1 : (t_0,t_1) \to \mathbb{R}$ dată de expresia

$$x_1(t) = \frac{1}{r_{P_{t_2}}(t)} \cdot \int_{t_2}^{t} u_{P_{t_2}}(s)ds, \quad t \in (t_0,t_1),$$

este soluţia problemei

$$\begin{cases} x' + p(t)x = q(t), \\ x(t_2) = 0. \end{cases}$$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. La rândul său, funcţia $y : (t_0,t_1) \to \mathbb{R}$ cu formula

$$y(t) = \frac{x_0}{r_{P_{t_2}}(t)} + x_1(t) = \frac{1}{r_{P_{t_2}}(t)} \cdot \left[x_0 + \int_{t_2}^{t} u_{P_{t_2}}(s)ds\right], \quad t \in (t_0,t_1),$$

este soluţia problemei

$$\begin{cases} x' + p(t)x = q(t), \\ x(t_2) = x_0. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 1.10. *2)* Folosim Exerciţiul 1.9, punctul *1)*.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Formula (1.1) poate fi *rezolvată*[8], în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare (omogene şi neomogene), în raport cu argumentul x':

$$x' = g(t,x), \tag{1.14}$$

unde funcţia $g : \Psi \to \mathbb{R}$ şi mulţimea $\Psi \subseteq \mathbb{R}^2$, din planul euclidian Otx, vor fi dotate cu proprietăţi semnificative: (de obicei) *deschidere* în topologia uzuală a planului, *netezime* — adică, existenţa unor derivate parţiale continue în raport cu ansamblul argumentelor — ş.a.m.d.

Atunci când este posibilă, rescrierea lui (1.1) în forma (1.14) poartă numele de aducerea la *forma normală* [21, pag. 158] a unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi. Un exemplu de ecuaţie diferenţială căreia nu-i putem construi forma normală este oferit de [21, Exemplul 4, pag. 123]

$$\mathrm{e}^{x'} + x' = t.$$

Prin *soluţie generală* [21, pp. 20, 21] a ecuaţiei diferenţiale (1.1) — sau (1.14) — înţelegem o familie de funcţii $\{x_C : I_C \to \mathbb{R} \,|\, C \in K \subseteq \mathbb{R}\}$ ai cărei membri verifică, în mod identic pe domeniul lor de definiţie, formula corespunzătoare a ecuaţiei. În

[8] Dacă punctul $(t_\star,x_\star,y_\star)$ îi este punct *interior* mulţimii Ω, dacă funcţia F are derivatele parţiale de ordinul întâi continue pe o *vecinătate* deschisă a lui $(t_\star,x_\star,y_\star)$ şi dacă $\frac{\partial F}{\partial y}(t_\star,x_\star,y_\star) \neq 0$, atunci expresia $F(t,x,y) = 0$ ne conduce, *în jurul lui* $(t_\star,x_\star,y_\star)$, la o formulă de tipul dorit [13, pag. 419].

plus, atunci când introducem o dată impusă, problema formată de ecuaţia diferenţială *în tandem* cu data va avea o singură soluţie, din respectiva familie, caracterizată de o valoare anume $C_\star \in K$. Vezi exemplul dat de (1.13). Soluţia respectivă constituie o *soluţie particulară* [21, pag. 8] a ecuaţiei diferenţiale.

Diversele metode de calcul al soluţiilor [21, pp. 22, 23] ne conduc fie la forma *explicită* [13, pag. 59] a acestora, adică la o formulă de tipul

$$x = h(t,C), \quad t \in I_C, C \in K, \tag{1.15}$$

fie la o formă *implicită* [13, ibid.], adică la o formulă de tipul

$$m(t,x,C) = 0. \tag{1.16}$$

Vezi Exerciţiul 1.9, punctul *3)*, pentru un exemplu de formă explicită, respectiv Exerciţiul 1.8, punctul *2)* pentru unul vizavi de forma implicită a soluţiei generale.

Constanta arbitrară C, din oricare dintre formulele (1.15), (1.16), este *constanta de integrare* [21, pag. 25] a formulei respective.

Formula matematică (1.16) se mai numeşte şi *integrala generală* a ecuaţiei diferenţiale ordinare (1.1) — sau (1.14) — [21, pag. 24]. Pentru determinarea *univocă* a *integralelor particulare* (corespondentele soluţiilor particulare) este suficient [20, pag. 182] ca funcţia m să fie netedă pe o vecinătate deschisă a punctului $(t_\star, x_\star, C_\star) \in \mathbb{R}^3$ şi ca

$$m(t_\star, x_\star, C_\star) = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial C}(t_\star, x_\star, C_\star) \neq 0.$$

La o atare constantă $C_\star$ ne referim, uneori, cu apelativul (constantă de integrare) *esenţială* [21, pag. 171].

Prin extensie de limbaj, atunci când problema constituită dintr-o ecuaţie diferenţială luată împreună cu o dată impusă posedă doar *o* (singură) *soluţie*, aceasta va fi numită soluţie particulară a ecuaţiei chiar şi atunci când **nu se obţine** din soluţia generală prin *particularizarea* constantei de integrare [21, pag. 25]. De exemplu, ecuaţia diferenţială

$$x' = f(x),$$

unde funcţia $f : (-\infty, 1]\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ este dată de expresiile

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{\ln(1-x)}, & x < 1 \text{ şi } x \neq 0, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

pe care o rezolvăm prin răsturnare, admite soluţia particulară $x = 1$ şi soluţia generală formată din *ansamblul* expresiilor (extrase din integrala generală)

$$x = 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{2(C-t)}}, \quad x = 1 - \mathrm{e}^{\sqrt{2(C-t)}}.$$

Prima soluţie nu provine din particularizarea lui C în vreuna din cele două expresii.

Capitolul 2
Unelte şi auxiliare: inegalităţi integrale şi diferenţiale, chestiunea unicităţii şi cea a perturbaţiei, funcţii Lipschitz

Fie $t_0 < t_2 < t_1$ numere reale fixate şi funcţia continuă $f : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$. Am folosit deja, în Capitolul 1, faptul că aplicaţia $F : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ dată de corespondenţa

$$t \longmapsto \int_{t_2}^{t} f(s)ds$$

este o *primitivă* — ori o *antiderivată* [14, pag. 19] — a lui f. Mai precis, acea primitivă care se anulează în t_2: $F(t_2) = 0$.

Într-adevăr, fie $t_3 \in (t_0, t_1)$ fixat şi $h \in (0, \min\{t_3 - t_0, t_1 - t_3\})$ oarecare. Estimările următoare, bazate pe *teorema de medie* [14, pag. 83], [16, pag. 401],

$$\frac{F(t_3+h) - F(t_3)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_{t_3}^{t_3+h} f(s)ds = \frac{1}{h} \cdot f(\xi_1) \cdot (t_3 + h - t_3) = f(\xi_1),$$
$$\frac{F(t_3) - F(t_3-h)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_{t_3-h}^{t_3} f(s)ds = f(\xi_2),$$

unde $\xi_1 = \xi_1(h) \in [t_3, t_3 + h]$, $\xi_2 \in [t_3 - h, t_3]$, ne conduc la egalitatea derivatelor laterale ale lui F în punctul t_3:

$$\begin{aligned} f(t_3) = \lim_{h \searrow 0} f(\xi_1(h)) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{F(t_3+h) - F(t_3)}{h} = F'_d(t_3) \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{F(t_3) - F(t_3-h)}{h} = F'_s(t_3). \end{aligned}$$

Astfel, dacă $\Psi \subseteq \mathbb{R}^2$ este o mulţime *deschisă* în topologia uzuală şi $t_4 < t_5$, $x_0 < x_1$ sunt numere reale fixate, cu proprietatea că

$$[t_4, t_5] \times [x_0, x_1] \subset \Psi, \tag{2.1}$$

dacă $g : \Psi \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă în raport cu ansamblul celor două variabile ale sale şi dacă aplicaţia $u : (t_4, t_5) \to (x_0, x_1)$ este continuă, atunci funcţia $G : (t_4, t_5) \to \mathbb{R}$ definită de expresia

$$G(t) = x_2 + \int_{t_6}^{t} g(s,u(s))ds, \quad \text{unde } t \in (t_4,t_5)$$

iar $t_6 \in (t_4,t_5)$ şi $x_2 \in \mathbb{R}$ sunt numere fixate, constituie primitiva care ia valoarea x_2 în punctul t_6 a funcţiei exprimate prin corespondenţa — vezi Exerciţiul 3.3 —

$$t \longmapsto g(t,u(t)).$$

Din acest motiv, se susţine afirmaţia că *problema cu dată impusă*

$$\begin{cases} x' = g(t,x), \\ x(t_6) = x_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

este echivalentă cu ecuaţia integrală, în raport cu *necunoscuta* $x = x(t)$:

$$x(t) = x_2 + \int_{t_6}^{t} g(s,x(s))ds, \quad t \in I \subseteq (t_4,t_5). \tag{2.3}$$

Aici, mulţimea I, cu $t_6 \in I$, desemnează un interval (de obicei) deschis de numere reale care îi este domeniu de definiţie necunoscutei şi $x_2 \in (x_0,x_1)$.

Exerciţiile care urmează se preocupă de (in)egalităţi de tipul (2.3): lor le este specifică *prezenţa* unei funcţii $x, u, \ldots$ *de ambele părţi* ale relaţiei de ordine. Ceea ce ne interesează este construcţia unei *estimări* a valorilor acestei funcţii pe baza celorlalte componente ale (in)egalităţii. Numim o atare estimare *apriorică*.

Exerciţiul 2.1. *([3, pp. 83–85], [4, pag. 262])* Să presupunem că funcţiile $u, a : [t_0,T) \to [0,+\infty)$, unde $-\infty < t_0 < T \leq +\infty$, şi $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ sunt continue, că g este crescătoare nestrict şi că $g(x) > 0$ pentru orice $x \geq k \geq 0$.

Dacă există numărul $c \geq k$ astfel încât

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} a(s)g(u(s))ds, \quad t \in [t_0,T), \tag{2.4}$$

şi mărimea $c < C \leq +\infty$ pentru care[1]

$$\int_{t_0}^{T} a(s)ds < \int_{c}^{C} \frac{dv}{g(v)},$$

atunci are loc estimarea

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(c) + \int_{t_0}^{t} a(s)ds\right), \quad t \in [t_0,T). \tag{2.5}$$

Aici,

[1] Ne reamintim faptul că (integrala improprie) $\int_{t_0}^{T} a(s)ds = \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t_n} a(s)ds$ pentru orice şir strict crescător de numere reale $(t_n)_{n\geq 1} \subset [t_0,T)$ cu $\lim_{n\to+\infty} t_n = T$. Vezi şi [14, pp. 90–93], [17, pag. 55].

$$G(x) = \int_k^x \frac{ds}{g(s)}, \quad x \geq k.$$

Soluţia exerciţiului 2.1. *Cazul* $C < +\infty$. Notăm cu $y(t)$ membrul drept al *inegalităţii* (integrale a) *lui Bihari* (2.4). Atunci,

$$u(t) \leq y(t), \quad t \in [t_0, T),$$

respectiv $y(t_0) = c$ şi $y(t) \geq c \geq k$. De unde, $g(y(t)) > 0$ peste tot în $[t_0, T)$.

Deducem că, dată fiind monotonia lui g,

$$y'(t) = a(t)g(u(t)) \leq a(t)g(y(t)),$$

respectiv

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} \leq a(t), \quad t \in [t_0, T).$$

Prin integrare în ambii membri ai inegalităţii, ajungem la

$$\begin{aligned} G(y(t)) - G(c) &= \int_c^{y(t)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_0}^t \frac{y'(v)}{g(y(v))} dv \\ &\leq \int_{t_0}^t a(s)ds. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Remarcăm că

$$G(c) + \int_{t_0}^t a(s)ds < G(c) + \int_c^C \frac{dv}{g(v)} = G(C), \quad t \in [t_0, T). \tag{2.7}$$

Aplicaţia y fiind continuă şi crescătoare nestrict, cum $y(t_0) = c \in [k, C)$ este clar că $y(t) \in [k, C)$ pe un *mic* interval I situat *la dreapta lui* t_0. Funcţia $G : [k, C] \to [0, G(C)]$ este strict crescătoare şi bijectivă — vezi şi Exerciţiul 4.1 —. De unde, ţinând seama de *monotonia* lui G^{-1}, concludem că

$$y(t) \leq G^{-1}\left(G(c) + \int_{t_0}^t a(s)ds\right) < C, \quad t \in I.$$

Estimările (2.6), (2.7) implică $I = [t_0, T)$.

Cazul $C = +\infty$ se demonstrează asemănător.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 2.2. *([11, pag. 24])* Fie numerele reale $t_0 < T$ fixate. Să presupunem că funcţiile $u, a : [t_0, T] \to [0, +\infty)$ sunt continue.

Dacă există numărul $c \geq 0$ astfel încât

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t a(s)u(s)ds, \quad t \in [t_0, T], \tag{2.8}$$

atunci are loc estimarea

$$u(t) \leq c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.9}$$

Soluţia exerciţiului 2.2. Fie numărul $\varepsilon \in (0,1)$ fixat. Înlocuim numărul c din membrul drept al *inegalităţii* (integrale) *Gronwall-Bellman* (2.8) cu numărul $c+\varepsilon$.

Ne situăm în contextul Exerciţiului 2.1. Fie $k := c+\varepsilon$.

Impunem ca $g(x) = x$ pentru orice $x \geq 0$, respectiv introducem numărul $C > 0$ prin

$$C := (c+1) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{T} a(s)ds\right).$$

Atunci, $G(x) = \ln\left(\frac{x}{c+\varepsilon}\right)$, unde $C \geq x \geq c+\varepsilon$, şi

$$G^{-1}(y) = (c+\varepsilon) \cdot \mathrm{e}^{y}, \quad y \in \left[0, \ln\left(\frac{C}{c+\varepsilon}\right)\right].$$

Avem

$$G^{-1}\left(G(c+\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = (c+\varepsilon) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right), \quad t \in [t_0, T].$$

Am ajuns la

$$u(t) \leq (c+\varepsilon) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right), \quad t \in [t_0, T].$$

Nu ne rămâne decât să-l *variem* pe ε: $\varepsilon \searrow 0$.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 2.3. *([8, pag. 293])* Fie numerele reale $h > 0$, t_0 oarecare şi $A, M \geq 0$ fixate. Dacă funcţia continuă $x : [t_0, t_0+h] \to [0, +\infty)$ satisface inegalitatea

$$x(t) \leq \int_{t_0}^{t} [A + M \cdot x(s)]\, ds, \quad t \in [t_0, t_0+h],$$

atunci

$$x(t) \leq Ah \cdot \mathrm{e}^{Mh}, \quad t \in [t_0, t_0+h].$$

Soluţia exerciţiului 2.3. Urmându-l pe Gronwall [8, ibid.], introducem funcţia $\zeta : [t_0, t_0+h] \to [0, +\infty)$ prin relaţia

$$x(t) = \mathrm{e}^{M \cdot (t-t_0)} \cdot \zeta(t), \quad t \in [t_0, t_0+h].$$

Funcţia ζ fiind continuă, există numărul $t_1 \in [t_0, t_0+h]$ cu proprietatea că [16, pag. 236]

$$\zeta(t_1) = \sup_{v\in[t_0,t_0+h]} \zeta(v) = \max_{v\in[t_0,t_0+h]} \zeta(v).$$

Întreprindem evaluările

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{M(t-t_0)}\zeta(t) &\le A\cdot(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} M\mathrm{e}^{M(s-t_0)}\cdot\zeta(s)ds \\ &\le A(t-t_0) + \left[\int_{t_0}^{t} M\mathrm{e}^{M(s-t_0)}ds\right]\cdot \sup_{v\in[t_0,t_0+h]}\zeta(v) \\ &\le A\cdot h + \left[\mathrm{e}^{M(t-t_0)}-1\right]\cdot\zeta(t_1), \quad t\in[t_0,t_0+h]. \end{aligned}$$

În final, pentru $t = t_1$, obţinem că

$$\mathrm{e}^{M(t_1-t_0)}\zeta(t_1) \le Ah + \left[\mathrm{e}^{M(t_1-t_0)}-1\right]\zeta(t_1),$$

de unde

$$\zeta(t_1) \le Ah,$$

respectiv

$$x(t) \le \mathrm{e}^{M(t-t_0)}\cdot Ah, \quad t\in[t_0,t_0+h].$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 2.4. Să presupunem că funcţia continuă $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ este strict crescătoare şi bijectivă. În plus, să considerăm integrala improprie

$$\int_0^1 \frac{ds}{g^{-1}(s)} < +\infty$$

şi să introducem funcţia $H:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ cu formulele[2]

$$H(0)=0, \quad H(x)=\int_0^x \frac{ds}{g^{-1}(s)} \text{ pentru orice } x>0.$$

Fiind date mărimile $0<c<C\le+\infty$ şi $-\infty<t_0<T\le+\infty$, respectiv funcţiile continue $a,u:[t_0,T)\to[0,+\infty)$ astfel încât

$$\int_{t_0}^{T} a(s)ds < \int_c^C \frac{dv}{g^{-1}(v)}$$

şi

[2] Pentru calculul derivatei lui H, adaptăm tehnica de la pagina 15, privitoare la derivatele lui F.

$$g(u(t)) \leq c + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)ds, \quad t \in [t_0, T), \tag{2.10}$$

este valabilă estimarea

$$u(t) \leq (H \circ g)^{-1} \left(H(c) + \int_{t_0}^{t} a(s)ds \right), \quad t \in [t_0, T). \tag{2.11}$$

Soluţia exerciţiului 2.4. Ne ocupăm doar de *cazul* $C < +\infty$.

Observăm că $g(0) = 0$ şi $g(x) > 0$ pentru orice număr $x > 0$, de unde $g^{-1}(y) > 0$ pentru orice $y > 0$.

Notăm cu $y(t)$ mărimea $\int_{t_0}^{t} a(s)u(s)ds$, unde $t \in [t_0, T)$. Aici, $y(t_0) = 0$.

Inegalitatea (2.10) se rescrie ca

$$u(t) \leq g^{-1}(c + y(t)),$$

ceea ce ne conduce la

$$\frac{(c+y)'(t)}{g^{-1}(c+y(t))} = a(t) \cdot \frac{u(t)}{g^{-1}(c+y(t))} \leq a(t), \quad t \in [t_0, T).$$

Prin integrare în ambii membri ai inegalităţii, obţinem că

$$\int_{c}^{c+y(t)} \frac{dv}{g^{-1}(v)} \leq \int_{t_0}^{t} a(s)ds,$$

respectiv că

$$H(c + y(t)) \leq H(c) + \int_{t_0}^{t} a(s)ds < H(C), \quad t \in [t_0, T).$$

În sfârşit, ţinând cont de monotonia lui H^{-1}, avem

$$c + y(t) \leq H^{-1} \left(H(c) + \int_{t_0}^{t} a(s)ds \right), \quad t \in [t_0, T).$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 2.5. *([18], în limba chineză)* Fie numerele reale $t_0 < T$ oarecare. Să presupunem că funcţiile $u, a : [t_0, T] \to [0, +\infty)$ sunt continue şi că are loc inegalitatea integrală

$$\frac{[u(t)]^2}{2} \leq \frac{[u(t_0)]^2}{2} + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)ds, \quad t \in [t_0, T). \tag{2.12}$$

Atunci,

$$u(t) \leq u(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)ds, \quad t \in [t_0, T).$$

Soluţia exerciţiului 2.5. Această *inegalitate* (integrală) *a lui Ouyang* (2.12) constituie un caz particular al inegalităţii Bihari *duale* (2.10). Într-adevăr, în contextul Exerciţiului 2.4, întrebuinţăm mărimile

$$g(x)=\frac{x^2}{2}=H^{-1}(x),\quad g^{-1}(x)=\sqrt{2x}=H(x)\text{ pentru orice }x>0.$$

Apoi, cu $\varepsilon\in(0,1)$ fixat, introducem cantităţile:

$$c:=\frac{[u(t_0)+\varepsilon]^2}{2},\quad C:=\frac{1}{2}\left[u(t_0)+1+\int_{t_0}^{T}a(s)ds\right]^2.$$

Estimarea (2.11) devine

$$u(t)\le u(t_0)+\varepsilon+\int_{t_0}^{t}a(s)ds,\quad t\in[t_0,T).$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 2.6. Fie mulţimea deschisă Ψ introdusă în (2.1), funcţia $g:\Psi\to\mathbb{R}$ continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale şi data impusă (t_6,x_2) situată în *dreptunghiul* $D:=(t_4,t_5)\times(x_0,x_1)$. Fie funcţiile $u,v,w:[t_6,t_7]\to(x_0,x_1)$, de clasă C^1, care le sunt soluţii problemelor:

$$\begin{cases}u'<g(t,u),\\ u(t_6)=x_2,\end{cases}\quad\begin{cases}v'=g(t,v),\\ v(t_6)=x_2,\end{cases}\quad\begin{cases}w'>g(t,w),\\ w(t_6)=x_2.\end{cases}$$

Atunci, este valabilă următoarea concluzie[3] a acestor *inegalităţi* (diferenţiale) *ale lui Ceaplîghin* [14, pag. 412]

$$u(t)<v(t)<w(t),\quad t\in(t_6,t_7].$$

Aici, $t_7\in(t_6,t_5)$.

Soluţia exerciţiului 2.6. Ne ocupăm doar de *inegalitatea* $u(t)<v(t)$.

Introducem funcţia $q:[t_6,t_7]\to\mathbb{R}$ cu formula

$$q(t)=v(t)-u(t),\quad t\in[t_6,t_7].$$

Se observă că $q(t_6)=0$ şi că

$$\begin{aligned}q'(t_6)&=g(t_6,v(t_6))-u'(t_6)\\&=g(t_6,u(t_6))-u'(t_6)\\&>0.\end{aligned}$$

Din

[3] În teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, asemenea rezultate se numesc (şi) *teoreme de comparare a* (soluţiilor) *ecuaţiilor diferenţiale* [1, pag. 30].

$$q'(t_6) = q'_d(t_6) = \lim_{h \searrow 0} \frac{q(t_6+h) - q(t_6)}{h}$$
$$= \lim_{h \searrow 0} \frac{v(t_6+h) - u(t_6+h)}{h}$$

deducem că $v(t) - u(t) > 0$ pe un *mic* interval de forma $(t_6, t_6+\varepsilon]$, unde $\varepsilon \in (0, t_7 - t_6]$.

Presupunând, prin reducere la absurd, că există numărul $t_8 \in (t_6+\varepsilon, t_7]$ astfel încât

$$q(t_8) = v(t_8) - u(t_8) = 0,$$

introducem mulţimea $Q = \{t \in (t_6+\varepsilon, t_7] \,|\, q(t) = 0\}$. Evident, Q este nevidă: $t_8 \in Q$.

Fie $t_\star := \inf Q$. La fel ca la Exerciţiul 1.1, concludem că $t_\star \in Q$, deci că

$$\begin{cases} v(t_\star) - u(t_\star) = 0, \\ v(t) - u(t) > 0, \quad t \in (t_6+\varepsilon, t_\star). \end{cases}$$

Aşadar,

$$\begin{aligned} q'(t_\star) = q'_s(t_\star) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{[v(t_\star) - u(t_\star)] - [v(t_\star - h) - u(t_\star - h)]}{h} \\ &= -\lim_{h \searrow 0} \frac{v(t_\star - h) - u(t_\star - h)}{h} \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} q'(t_\star) &= g(t_\star, v(t_\star)) - u'(t_\star) \\ &> g(t_\star, v(t_\star)) - g(t_\star, u(t_\star)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

în contradicţie cu (2.13).

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 2.7. Fie $x : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ soluţia problemei iniţiale

$$\begin{cases} x' = x^2 + 1, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Atunci, pe un *mic* interval $I := [0, \eta]$, cu $\eta < \ln 2 < \frac{\pi}{4}$, are loc dubla inegalitate

$$t \leq x(t) \leq \mathrm{e}^t - 1, \quad t \in I.$$

Soluţia exerciţiului 2.7. Introducem problemele de mai jos, bazate pe ecuaţii diferenţiale liniare [14, pag. 416]:

$$\begin{cases} u' = 1-\varepsilon, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x^2+1, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} w' = w+1+\varepsilon, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Aici, numărul $\varepsilon \in (0,1)$ este fixat.

Dacă u, x, w sunt soluţii corespunzătoare ale problemelor, atunci, pe un mic interval I din $\mathbb{R}$ situat *la dreapta lui* 0*,* ele vor lua numai valori aflate *în vecinătatea lui* 0. În plus, derivatele lor de ordinul întâi vor avea doar valori (strict) pozitive pe I, deci cele trei funcţii vor fi (strict) *crescătoare pe I*. De unde rezultă că

$$u(t), x(t), w(t) \in [0,1), \quad t \in I.$$

Astfel,

$$u'(t) < [u(t)]^2 + 1, \quad w'(t) > [w(t)]^2 + 1 \quad \text{pentru orice } t \in I,$$

adică ne regăsim în contextul Exerciţiului 2.6.

Conform Exerciţiului 1.5,

$$u(t) = (1-\varepsilon)\cdot t, \quad w(t) = (1+\varepsilon)\cdot\left(\mathrm{e}^t - 1\right), \quad t \in I.$$

Pentru a concluziona, îl variem pe ε: $\varepsilon \searrow 0$. Soluţia x poate fi determinată prin răsturnarea ecuaţiei sale diferenţiale: $x(t) = \tan t$.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 2.8. Să presupunem că funcţia $g : \Psi \to \mathbb{R}$, continuă în raport cu ansamblul celor două variabile ale ei, este (şi) *funcţie Lipschitz* în cea de-a doua variabilă:

$$|g(t,u_1) - g(t,u_2)| \le L \cdot |u_1 - u_2| \tag{2.14}$$

pentru toate perechile $(t, u_{1,2})$ din dreptunghiul[4] *închis* $\overline{D}$. Aici, numărul $L > 0$ este fixat.

Fie datele impuse $(t_6, x_{2,3}) \in D$ şi soluţiile $x, y : (t_4, t_5) \to (x_0, x_1)$ ale problemelor

$$\begin{cases} x' = g(t,x), \\ x(t_6) = x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = g(t,y), \\ y(t_6) = x_3. \end{cases}$$

Atunci, este valabilă estimarea

$$|x(t) - y(t)| \le M \cdot |x_2 - x_3|, \quad t \in (t_4, t_5), \tag{2.15}$$

unde $M := \mathrm{e}^{L\cdot(t_5-t_4)}$.

Soluţia exerciţiului 2.8. Întrebuinţăm transformarea problemelor în ecuaţii integrale (2.3). Astfel,

$$\begin{cases} x(t) = x_2 + \int_{t_6}^t g(s, x(s))ds, \\ y(t) = x_3 + \int_{t_6}^t g(s, y(s))ds, \end{cases} \quad t \in (t_4, t_5).$$

[4] Introdus în Exerciţiul 2.6.

Pe baza *inegalităţii triunghiului,* deducem că [16, pag. 399]

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\le |x_2-x_3|+\left|\int_{t_6}^{t}|g(s,x(s))-g(s,y(s))|\,ds\right| \\ &\le |x_2-x_3|+\left|\int_{t_6}^{t}L\cdot|x(s)-y(s)|\,ds\right|, \quad t\in(t_4,t_5).\end{aligned}$$

Ne rezumăm la *cazul* $t_6 \le t$. Aplicând inegalitatea Gronwall-Bellman, ajungem la

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\le |x_2-x_3|\cdot\exp\left(\int_{t_6}^{t}L\,ds\right)=|x_2-x_3|\cdot \mathrm{e}^{L\cdot(t-t_6)} \\ &\le \mathrm{e}^{L\cdot(t_5-t_6)}\cdot|x_2-x_3|\,.\end{aligned}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 2.8 stabileşte *egalitatea* soluţiilor x, y în cazul datelor impuse egale: $x_2 = x_3$. Convenim că o ecuaţie diferenţială satisface **chestiunea unicităţii** dacă problema cu dată impusă prezentată în acest exerciţiu, în care introducem ecuaţia în cauză, admite cel mult *o* (singură) *soluţie.*

Prin satisfacerea **chestiunii perturbaţiei** de către o ecuaţie diferenţială înţelegem faptul că o problemă cu dată impusă, de tipul celei din Exerciţiul 2.8, poate fi rezolvată printr-o *trecere la limită* aplicată soluţiilor unor probleme *perturbate* (deformate): adică, alegând $x_3 := x_2 + \varepsilon$ şi apoi *variindu-l pe* ε, $\varepsilon \to 0$.

Condiţia (*locală*) de funcţie Lipschitz în argumentul *spaţial* x, adică (2.14), este *suficientă* pentru ca o ecuaţie diferenţială $x' = g(t,x)$ să satisfacă ambele chestiuni.

Dacă funcţia g posedă o *derivată parţială* în raport cu *cea de-a doua variabilă,* $\frac{\partial g}{\partial u} : \Psi \to \mathbb{R}$, care să fie continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale pe dreptunghiul închis $\overline{D}$, atunci, apelând la *teorema creşterilor finite*[5] (Lagrange)*,* deducem că

$$\begin{aligned}|g(t,u_1)-g(t,u_2)| &\le \sup_{\xi\in[x_0,x_1],\,\xi=\xi(t)}\left|\frac{\partial g}{\partial u}(t,\xi)\right|\cdot|u_1-u_2| \\ &\le \sup_{(\alpha,\beta)\in\overline{D}}\left|\frac{\partial g}{\partial u}(\alpha,\beta)\right|\cdot|u_1-u_2|, \quad (t,u_{1,2})\in\overline{D},\end{aligned}$$

estimări care ne indică cum putem găsi valori *convenabile* ale constantei[6] L:

$$\sup_{(\alpha,\beta)\in\overline{D}}\left|\frac{\partial g}{\partial u}(\alpha,\beta)\right| \le L < +\infty.$$

Exerciţiul 2.9. Fie numărul $t_0 \in \mathbb{R}$ fixat şi funcţia $a : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continuă.

[5] Sau *teorema* (formula) *mediei* [13, pag. 362], [16, pag. 283].

[6] Mulţimea $\overline{D}$ este compactă în topologia uzuală a planului euclidian. Vezi Exerciţiul 3.1.

Rezolvaţi problema

$$\begin{cases} x' = a(t)\cdot x^2, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 2.9. Construim mulţimea Ψ, dreptunghiul D

$$\Psi := (t_1,t_2)\times(x_1,x_2), \quad D := (t_3,t_4)\times(x_3,x_4), \quad \overline{D}\subsetneq \Psi,$$

unde $t_0 \in (t_3,t_4)$, $x_0 \in (x_3,x_4)$, şi funcţia $\overline{a} : (t_1,t_2) \to \mathbb{R}$ care prelungeşte, cu păstrarea continuităţii[7], funcţia a. Aici, $t_{1,2} := t_0 \mp 2$, $x_{1,2} := x_0 \mp 2$, $t_{3,4} := t_0 \mp 1$, $x_{3,4} := x_0 \mp 1$.

Funcţia $g : \Psi \to \mathbb{R}$, cu formula $g(t,u) = \overline{a}(t)\cdot u^2$, este continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale şi, în plus,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(t,u) = 2\overline{a}(t)u, \quad (t,u)\in\overline{D}.$$

Astfel,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial g}{\partial u}(t,u)\right| &\le 2\cdot \sup_{t\in[t_3,t_4]} |\overline{a}(t)|\cdot\max\{|x_3|,|x_4|\} \\ &\le 2\max_{t\in[t_0,t_4]}|a(t)|\cdot(|x_0|+1) \\ &\le L < +\infty. \end{aligned}$$

Ecuaţia din enunţ satisface, aşadar, atât chestiunea unicităţii cât şi chestiunea perturbaţiei.

Cazul $x_0 > 0$. Fiind continuă, orice *prezumtivă* soluţie x ia valori *pozitive* pe un *mic* interval la dreapta lui t_0:

$$x(t) > 0, \quad t\in[t_0,t_5],$$

unde $t_5 > t_0$ este fixat. Evident, $t_5 = t_5(x)$.

Ecuaţia se rescrie ca

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{x(t)}\right] = a(t), \quad t\in[t_0,t_5].$$

Prin integrare în ambii membri ai egalităţii, ajungem la

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x(t_0)} - \int_{t_0}^t a(s)ds} = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \int_{t_0}^t a(s)ds}, \quad t\in[t_0,t_5]. \tag{2.16}$$

Introducem funcţia (nu neapărat bijectivă) $A : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ cu formula $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ pentru orice $t \ge t_0$ şi mulţimea

[7] Vezi funcţia $\overline{p}$ din Exerciţiul 1.6.

$$\mathscr{M} := \left\{ A(t) \,|\, t \in [t_0, +\infty), A(t) < \frac{1}{x_0} \right\} = A\left(A^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{x_0} \right) \right) \right).$$

Evident, $0 \in \mathscr{M}$.

Fie $M_\infty := \sup \mathscr{M} \leq \frac{1}{x_0}$. Atunci, soluţia cu formula din (2.16) există pe orice interval $[t_0, t_5]$ pe care $A(t) < M_\infty$. Aici, $t_5 = t_5(a)$.

Subcazul $a(t) \geq 0, t \geq t_0$. Fie mărimea (cea mai mare) $t_0 < T \leq +\infty$ cu proprietatea că

$$M_\infty = \int_{t_0}^{T} a(s)ds \leq \frac{1}{x_0}.$$

Atunci, problema admite *exact o* (singură) *soluţie* definită pe intervalul *maximal*[8] $[t_0, T)$:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \quad t \in [t_0, T).$$

În plus, are loc *alternativa*: fie $T = +\infty$, adică soluţia există peste tot *în viitor,* fie $T < +\infty$ [1, pag. 36], adică *soluţia explodează în timp finit* şi

$$\lim_{t \nearrow T} x(t) = +\infty, \quad \int_{t_0}^{T} a(s)ds = \frac{1}{x_0}.$$

Subcazul $a(t) \leq 0, t \geq t_0$. Evident, soluţia cu formula (2.16) există peste tot în viitor.

Cazul $x_0 = 0$. Aici avem nevoie de chestiunea unicităţii. Observăm că funcţia *identic nulă,* $x \equiv 0$, verifică atât ecuaţia cât şi data impusă. Ca atare, nu mai există altă soluţie.

Cazul $x_0 < 0$ se tratează asemănător primului caz.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 2.10. Apelând la chestiunea perturbaţiei, rezolvaţi problema

$$\begin{cases} x' = x^2, & t \geq 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 2.10. Fie numărul $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ fixat.

Introducem următoarea *perturbare* a problemei din enunţ:

$$\begin{cases} y' = y^2, & t \geq 0, \\ y(0) = \varepsilon. \end{cases}$$

Conform primului caz discutat la Exerciţiul 2.9, această din urmă problemă are soluţia $y_\varepsilon : I_\varepsilon \to \mathbb{R}$ dată de expresia

[8] În raport cu relaţia de incluziune dintre intervalele pe care ar putea exista soluţia. Spunem că soluţia x nu mai poate fi *prelungită la dreapta lui* T.

$$y_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot t}, \quad t \in I_\varepsilon := \left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

În particular,

$$0 < y_\varepsilon(t) \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1, \quad t \in [0,1] \subset I_\varepsilon.$$

Să presupunem că problema din enunţ admite soluţia x, definită pe intervalul (mic) $I \subseteq [0,1]$, cu $0 \in I$, astfel încât:

$$x(t) \in (-1,1), \quad t \in I.$$

Adaptând soluţia Exerciţiului 2.8 (*cazul* $t_6 \leq t$), ajungem la o estimare similară lui (2.15):

$$|x(t) - y_\varepsilon(t)| \leq M \cdot |0-\varepsilon|, \quad t \in I,$$

unde $M := \mathrm{e}^2$.

Inegalitatea

$$|x(t)| \leq y_\varepsilon(t) + M\varepsilon, \quad t \in I,$$

ne conduce, variindu-l pe ε, $\varepsilon \searrow 0$, pentru *t fixat*, la

$$x(t) = 0, \quad t \in I.$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Capitolul 3
Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiilor pentru problemele Cauchy ale ecuaţiilor diferenţiale, de ordinul întâi

În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, lucrăm raportat la reperul cartezian Otx [9, pag. 98]. Astfel, în contextul Figurii 3.1, introducem următoarele *distanţe faţă de origine* [16, pag. 529] ale punctelor planului:

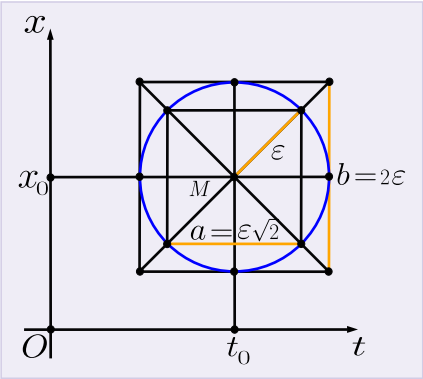


Fig. 3.1 *Echivalenţa normelor în plan:* norme diferite, deşi produc bile de *forme diferite*, conduc la *aceeaşi* topologie. Interioarele celor două pătrate, cu laturile a, b portocalii şi centrul de simetrie $M(t_0,x_0)$, desemnează bile în topologia dată de norma $\|\star\|_\infty$. Interiorul discului de rază (portocalie) ε şi de centru M este o bilă în topologia dată de norma $\|\star\|_2$.

ele sunt *norma* uzuală $\|\star\|_2$, numită şi *de index* 2, cu formula

$$\|(t_0,x_0)\|_2 := \sqrt{t_0^2+x_0^2} = \text{lungimea segmentului } OM,$$

respectiv norma $\|\star\|_\infty$, cu formula [16, pag. 534]

$$\|(t_0,x_0)\|_\infty := \max\{|t_0|,|x_0|\}.$$

Dubla inegalitate

$$\max\{|t|,|x|\} \leq \sqrt{t^2+x^2} \leq \sqrt{2}\cdot\max\{|t|,|x|\}, \quad t,x\in\mathbb{R},$$

arată că

$$B^\infty\left(M,\frac{a}{2}\right) \subsetneq B^2(M,\varepsilon) \subsetneq B^\infty\left(M,\frac{b}{2}\right),$$

unde $a := \varepsilon\sqrt{2}$, $b := 2\varepsilon$ şi $\varepsilon > 0$ este un număr fixat. Litera B vine de la *bilă*:

$$B^2(M,\varepsilon) := \left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|(t,x)-(t_0,x_0)\|_2 = \sqrt{(t-t_0)^2+(x-x_0)^2} < \varepsilon\right\},$$

adică bila de *centru* M şi de *rază* ε ale cărei puncte (t,x) sunt *distanţate* prin norma $\|\star\|_2$, şi

$$B^\infty\left(M,\frac{a}{2}\right) := \left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \max\{|t-t_0|,|x-x_0|\} < \frac{a}{2}\right\}.$$

De aici deducem că o mulţime *deschisă* — în topologia uzuală — a planului euclidian, adică o reuniune oarecare de interioare de discuri (bile B^2) poate fi reorganizată ca o reuniune de (interioare de) pătrate (bile B^∞). Mai mult chiar, orice mulţime deschisă poate fi imaginată ca o reuniune de (interioare de) dreptunghiuri *mici*, cu laturile *paralele cu axele de coordonate* [16, pag. 533].

Exerciţiul 3.1. *([7, pag. 46])* Fie $a < b$ şi $c < d$ numere reale fixate. Fie $(G_i)_{i\in I}$, $I \neq \emptyset$, o familie de mulţimi deschise în topologia uzuală astfel încât

$$K := [a,b]\times[c,d] \subsetneq \bigcup_{i\in I} G_i.$$

Atunci, există submulţimea nevidă, *finită*, J a lui I pentru care

$$K \subsetneq \bigcup_{j\in J} G_j.$$

Soluţia exerciţiului 3.1. Întrebuinţăm Figura 3.2. Astfel, presupunem că mulţimile deschise G_i sunt bile B^2, cu aceeaşi notaţie: $G_i = B^2_i$.

Fie $x\in[c,d]$. Mulţimea $K_x := \{(t,x)\,|\,t\in[a,b]\} = [a,b]\times\{x\}$ constituie un *segment închis* orizontal al planului $\mathbb{R}^2$.

Ca submulţime *compactă* [7, pag. 44], [13, pag. 105] a dreptei $d_x := \mathbb{R}\times\{x\}$ din care face parte — şi pentru care realizăm *identificarea* [20, pag. 17] cu $\mathbb{R}$, adică $\mathbb{R}\equiv d_x$ —, K_x este (şi) o submulţime compactă a planului. Aceasta pentru că topologia uzuală a dreptei este *topologia relativă* [7, pag. 28] construită pe dreaptă de către topologia uzuală a planului:

$$\begin{aligned}(t-\delta,t+\delta) &\equiv (t-\delta,t+\delta)\times\{x\}\\ &= B^2((t,x),\delta)\cap\{(u,x)\,|\,u\in\mathbb{R}\} = B^2\cap(\mathbb{R}\times\{x\})\\ &= B^2\cap d_x \quad \text{pentru orice } \delta=\delta(t)>0, t\in[a,b].\end{aligned}$$

De unde rezultă că putem ajunge la *acoperirea* lui K_x cu un *număr finit* de intervale $(t-\delta(t), t+\delta(t))$ dacă şi numai dacă putem ajunge la acoperirea sa cu un număr finit — acelaşi! — de discuri $B^2((t,x),\delta(t))$.

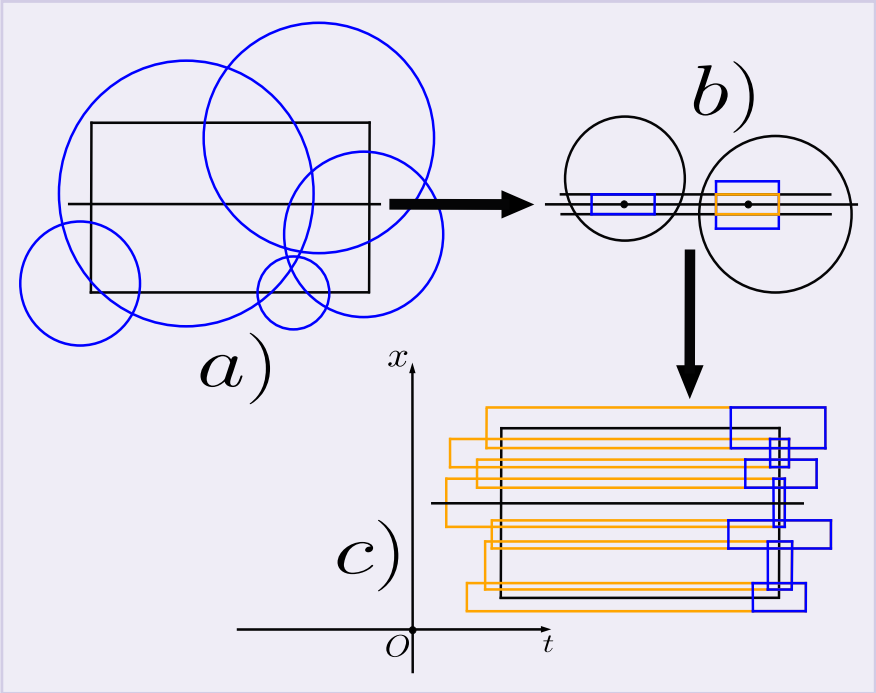


Fig. 3.2 **a)** *Parchetarea unei încăperi*: cum să reduci la un număr finit de discuri albastre o acoperire deschisă oarecare a unui planşeu dreptunghiular. **b)** Fiecare punct al *planşeului,* fiind element al măcar unui disc, îi va fi *centru de simetrie* unui dreptunghi albastru având laturile paralele cu axele de coordonate şi care este inclus în discul respectiv. Intersecţia cu dreptunghiul podelei a oricărei drepte a planului acesteia care să fie paralelă cu axa de coordonate *orizontală* este fie mulţimea vidă fie un segment închis orizontal ce va fi acoperit de un număr finit de astfel de dreptunghiuri, ale căror centre de simetrie se găsesc pe el. Alegând *cea mai mică înălţime* a acestor dreptunghiuri, le restrângem la o mulţime finită de dreptunghiuri portocalii, (unele) nedisjuncte, toate de aceeaşi înălţime. **c)** Am construit astfel o *bandă dreptunghiulară* portocalie care acoperă o zonă de lăţimea întregii podele. În plus, dată fiind reducerea lor în dimensiune, dreptunghiurile benzii sunt incluse într-un număr finit de discuri (nedesenate). Observăm că una din muchiile laterale ale încăperii este acoperită cu dreptunghiuri albastre, câte unul din fiecare bandă. Putem, astfel, alege un număr finit de asemenea dreptunghiuri: benzile lor acoperă, în întregime, podeaua. Alegând câte un singur disc pentru fiecare dreptunghi al acestei acoperiri, găsim *subacoperirea finită* cu discuri a planşeului.

Aşadar, mulţimea K_x poate fi acoperită cu un număr finit de discuri G_i:

$$\{G_1^x, G_2^x, \ldots, G_{n_x}^x\},$$

numerotate de la stânga la dreapta. Evident, mulţimile $I_i^x := K_x \cap G_i^x$ sunt segmente mărginite (nu neapărat deschise la capete, vezi cazul când $K_x \subsetneq G_i^x$) care fac parte din dreapta d_x.

De asemeni,

$$K_x = \bigcup_{i=1}^{n_x} I_i^x, \quad K_x \cap G_i^x \cap G_{i+1}^x = I_i^x \cap I_{i+1}^x \neq \emptyset \text{ pentru orice } i.$$

În aceste discuri putem construi mici dreptunghiuri (fără *muchii*) $D_i^{t,x} \subsetneq G_i^x$, cu laturile paralele cu axele de coordonate ale reperului Otx şi având *centrele de simetrie* (intersecţia diagonalelor, punctul (t,x)) situate pe segmentul K_x — inclusiv în capetele lui! —:

$$I_i^x = \bigcup_{(t,x)\in I_i^x} \{(t,x)\} \subsetneq \bigcup_{(t,x)\in I_i^x} D_i^{t,x} \subsetneq G_i^x.$$

Pentru orice punct $(t,x) \in I_i^x \cap I_{i+1}^x$ construim câte un singur dreptunghi!

Din acoperirea deschisă a lui K_x dată de familia de dreptunghiuri

$$\left\{ D_i^{t,x} \,|\, (t,x) \in I_i^x,\, i \in \overline{1,n_x} \right\}$$

extragem o subacoperire finită: $\left(D^{t_j^x,x}\right)_{j\in\overline{1,m_x}}$, unde $a \leq t_1^x < t_2^x < \cdots < t_{m_x}^x \leq b$. La fel, $D^{t_j^x,x} \cap D^{t_{j+1}^x,x} \neq \emptyset$ pentru orice j.

Fie $D_\star^x := D^{t_{m_x}^x,x}$ dreptunghiul cu centrul de simetrie în punctul $\left(t_{m_x}^x, x\right)$. Dacă $h_x > 0$ este *cea mai mică* dintre *înălţimile* dreptunghiurilor $D^{t_j^x,x}$, atunci putem (eventual) *subţia* toate aceste dreptunghiuri — păstrându-le nedeplasate centrele de simetrie; vezi Figura 3.2, punctul *b)*: trecem de la dreptunghiul albastru la cel portocaliu — astfel încât să aibă, fiecare din ele, înălţimea h_x. Noilor dreptunghiuri le păstrăm notaţia:

$$K_x \subsetneq \mathbb{B}_x := \bigcup_{j=1}^{m_x} D^{t_j^x,x}.$$

Aici, $\mathbb{B}_x$ desemnează o *bandă* orizontală, cu înălţimea h_x şi *lăţimea* mai mare decât $b-a$. În Figura 3.2, la punctul *c)* banda $\mathbb{B}_x$ este colorată în portocaliu iar dreptunghiul $D_\star^x$ în albastru.

Fie $t \in [a,b]$. Atunci, segmentul închis *vertical* $K^t := \{t\} \times [c,d]$ este submulţime compactă a dreptei $d^t := \{t\} \times \mathbb{R}$ din care face parte, $K^t \subsetneq d^t \equiv \mathbb{R}$, respectiv a planului euclidian $\mathbb{R}^2$.

Familia de dreptunghiuri $(D_\star^x)_{x\in[a,b]}$ alcătuieşte o acoperire deschisă a segmentului K^b. Din ea extragem subacoperirea finită $\left(D_\star^{x_i}\right)_{i\in\overline{1,p}}$:

$$K^b \subsetneq \bigcup_{i=1}^{p} D_\star^{x_i}, \quad c \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq d.$$

Aici, $D_\star^{x_i} \cap D_\star^{x_{i+1}} \neq \emptyset$ pentru orice i.

În fine,

$$K \subsetneq \bigcup_{i=1}^{p} \mathbb{B}_{x_i}, \quad \mathbb{B}_{x_i} \cap \mathbb{B}_{x_{i+1}} \cap K^t \neq \emptyset \text{ pentru orice } i \in \overline{1,p}, t \in [a,b].$$

Fiecare dreptunghi mic $D_j^{t_j^x,x}$ care intră în compoziţia acestor benzi se găseşte în interiorul (cel puţin) unui disc B^2 din (sub)acoperirile finite ale segmentelor orizontale K_{x_i}. Alegând câte un (singur) disc pentru fiecare dreptunghi, construim subacoperirea finită căutată.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 3.2. *1)* Orice mulţime G deschisă în topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$, dacă îi este acestuia submulţime *proprie* (adică, $G \notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$), are frontiera nevidă:

$$\mathrm{Fr}(G) := \overline{G} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus G} \text{ ([16, pag. 535])}, \quad \mathrm{Fr}(G) = \overline{G} \cap (\mathbb{R} \setminus G), \quad \mathrm{Fr}(G) \neq \emptyset.$$

2) Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ mulţimi deschise, nevide şi disjuncte, cu $A \cup B \subsetneq \mathbb{R}$. Adaptăm notaţia din demonstraţia punctului *1)* şi spunem că V_a^A, V_b^B sunt intervalele *maximale* din A, respectiv din B ale punctelor acestor mulţimi, $a \in A$, $b \in B$. Atunci,

$$V_a^A = V_a^{A \cup B}, a \in A, \quad V_b^B = V_b^{A \cup B}, b \in B.$$

3) Fie numerele reale $\alpha < \beta$ fixate. Atunci, intervalul (α, β) este o mulţime *conexă* în raport cu topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$, adică nu există mulţimile $A, B \subset \mathbb{R}$, nevide, disjuncte şi deschise (în topologia uzuală), cu proprietatea că [16, pag. 537]

$$(\alpha, \beta) = A \cup B. \tag{3.1}$$

Soluţia exerciţiului 3.2. *1)* **Admitem** [20, pp.14–15] că orice mulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}$ fie este *nemărginită la dreapta* (adică, există şirul strict crescător $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq A$ cu $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$) fie are un *majorant* (adică, există numărul real M_A cu $a \leq M_A$ pentru orice $a \in A$).

Evident, dacă există un asemenea M_A, atunci $-\infty < \sup A \leq M_A$.

Admitem, desigur, şi versiunea "stângă" a Afirmaţiei: A, nevidă, fie este *nemărginită la stânga* (adică, şirul descreşte strict şi $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$) fie are un *minorant* m_A, adică $a \geq m_A$ pentru orice $a \in A$.

Şi aici, existenţa unui m_A implică: $m_A \leq \inf A < +\infty$.

Vom considera că o mulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă nu este nici nemărginită la dreapta şi nici nemărginită la stânga: $A \subseteq (\inf A, \sup A)$.

Fie $g \in G$ un număr fixat. Atunci, există numărul $\varepsilon_g > 0$ astfel încât

$$E_g := (g - \varepsilon_g, g + \varepsilon_g) \subseteq G.$$

Notăm cu $\mathscr{I}_g$ mulţimea tuturor intervalelor nevide, deschise (la capete) şi mărginite de numere reale care îi sunt submulţimi lui G şi îl conţin pe g. Cum $E_g \in \mathscr{I}_g$, avem $\mathscr{I}_g \neq \emptyset$.

Dacă $I \in \mathscr{I}_g$, atunci există numerele α_I, β_I pentru care $I = (\alpha_I, \beta_I)$ şi $\alpha_I < g < \beta_I$. În particular, $\alpha_{E_g} = g - \varepsilon_g$, $\beta_{E_g} = g + \varepsilon_g$.

Introducem mulţimile

$$\mathscr{S}_g = \left\{ \alpha_I \,\middle|\, I \in \mathscr{I}_g \right\}, \quad \mathscr{D}_g = \left\{ \beta_I \,\middle|\, I \in \mathscr{I}_g \right\}.$$

Evident, ele sunt nevide şi

$$M_{\mathscr{S}_g} = m_{\mathscr{D}_g} = g.$$

Introducem mulţimea $V_g := \bigcup_{I \in \mathscr{I}_g} I$. Atunci,

$$V_g \in \left\{ (-\infty, +\infty), (-\infty, \sup \mathscr{D}_g), (\inf \mathscr{S}_g, +\infty), (\inf \mathscr{S}_g, \sup \mathscr{D}_g) \right\}.$$

Aici, intervalele cu "sup", "inf" există numai dacă mărimile respective sunt *finite*[1]. Deoarece $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ şi $V_g \subseteq G \neq \mathbb{R}$, deducem că V_g este un *interval* de numere reale care poate lua una din formele:

$$(-\infty, \beta), \ (\alpha, +\infty), \ (\alpha, \beta),$$

unde cantităţile α şi β depind de g. Îl numim intervalul *maximal* al lui g în G.

Are loc *alternativa*: fiind date $g_{1,2} \in G$, sau $V_{g_1} = V_{g_2}$ sau[2] $V_{g_1} \cap V_{g_2} = \emptyset$.

Deoarece

$$G = \bigcup_{g \in G} \{g\} \subseteq \bigcup_{g \in G} V_g \subseteq G,$$

deducem că există mulţimea *nevidă* $\mathscr{G} \subseteq G$ astfel încât

$$G = \bigcup_{g \in \mathscr{G}} V_g, \quad V_{g_1} \cap V_{g_2} = \emptyset \text{ pentru orice } g_1 \neq g_2 \text{ din } \mathscr{G}.$$

Intervalul V_g (unde $g \in \mathscr{G}$) fiind nevid, există numărul *raţional*[3] $q_g \in V_g$. Observăm că aplicaţia

---

[1] Dacă $x < g$ se găseşte în $\mathbb{R} \backslash V_g$, atunci $y \in \mathbb{R} \backslash V_g$ pentru orice $y < x$. În caz contrar, ar exista $I \in \mathscr{I}_g$ cu $y \in I$, de unde $x \in (y, g) \subsetneq I$, adică $x \in V_g$. La fel, dacă ar exista $x > g$ în $\mathbb{R} \backslash V_g$, atunci $V_g \cap (x, +\infty) = \emptyset$.

[2] Într-adevăr, dacă $V_{g_1} \cap V_{g_2} \neq \emptyset$, atunci vor exista intervalele $I_{g_i} \in \mathscr{I}_{g_i}$, unde $i = 1, 2$, cu proprietatea că $I_{g_1} \cap I_{g_2} \neq \emptyset$. De aici, $J := I_{g_1} \cup I_{g_2} \in \mathscr{I}_{g_1} \cap \mathscr{I}_{g_2}$. Deducem că $\bigcup_{I \subseteq J, I \in \mathscr{I}_{g_i}} I = J$, respectiv că $V_{g_1} = V_{g_2} = \bigcup_{I \in \mathscr{I}_{g_i}, J \subseteq I} I$.

[3] Dacă $(\alpha, \beta) \in \mathscr{I}_g$, atunci $\frac{[\gamma \cdot \alpha] + 1}{\gamma} \in (\alpha, \beta) \cap \mathbb{Q}$, unde $\gamma := \left[\frac{1}{\beta - \alpha} \right] + 1$.

$$\mathscr{G} \ni g \longmapsto q_g \in \mathbb{Q}$$

este *injectivă*, deci mulţimea $\mathscr{G}$ este *cel mult numărabilă* [20, pag. 19] — adică, fie *finită* fie (infinită) *numărabilă* —.

Aşadar, orice submulţime deschisă proprie a lui $\mathbb{R}$ este *reuniunea unei mulţimi cel mult numărabile de intervale deschise, nevide şi disjuncte două câte două*.

Fixăm $g_0 \in \mathscr{G}$.

Cazul $V_{g_0} = (-\infty, \beta)$. Afirmăm că $\beta \in \mathbb{R}\backslash G$. Într-adevăr, în caz contrar, ar exista $g_1 \in \mathscr{G}$, cu $g_1 \neq g_0$, pentru care $\beta \in V_{g_1}$. Acest fapt ne-ar conduce la o contradicţie, căci

$$E_\beta \subseteq V_{g_1}, \quad E_\beta \cap V_{g_0} \neq \emptyset,$$

adică $V_{g_1} \cap V_{g_0} \neq \emptyset$, de unde $\beta \in V_\beta = V_{g_1} = V_{g_0}$.

În sfârşit, cum $(-\infty, \beta] = \overline{(-\infty, \beta)} \subseteq \overline{G}$, avem $\beta \in \overline{G}$, deci $\beta \in \mathrm{Fr}(G)$.

În *cazul* $V_{g_0} = (\alpha, +\infty)$ avem $\alpha \in \mathrm{Fr}(G)$, iar în *cazul* $V_{g_0} = (\alpha, \beta)$ avem $\{\alpha, \beta\} \subseteq \mathrm{Fr}(G)$.

2) Fie numărul $a \in A$ fixat.

Cazul $V_a^A = (-\infty, \beta)$. Să presupunem că, prin reducere la absurd, există intervalul deschis I, cu $V_a^A \subsetneq I \subseteq A \cup B$. Cum $A \cup B \neq \mathbb{R}$, dispunem (şi) de un număr real γ astfel încât $I = (-\infty, \gamma)$. De aici, cum $\beta \in \mathrm{Fr}(A)$, deducem că $\beta \in (A \cup B)\backslash A$, adică $\beta \in B$. Atunci, $V_a^A \cap V_\beta^B \neq \emptyset$, ceea ce constituie o contradicţie: $A \cap B = \emptyset$.

În concluzie, $V_a^{A \cup B} = (-\infty, \beta)$, de unde

$$\beta \in \mathrm{Fr}(A \cup B). \tag{3.2}$$

Cazurile $V_a^A = (\alpha, +\infty)$ şi $V_a^A = (\alpha, \beta)$ se discută în mod asemănător.

3) Dacă ar avea loc (3.1), atunci ar exista familiile $(A_m)_{m \in I_A}$, $(B_n)_{n \in I_B}$ de intervale deschise, nevide, disjuncte două câte două, unde mulţimile $I_A, I_B \subseteq \mathbb{N}$ sunt cel mult numărabile, astfel încât

$$A = \bigcup_{m \in I_A} A_m, \quad B = \bigcup_{n \in I_B} B_n, \quad A_m \cap B_n = \emptyset \text{ pentru orice indecşi } m, n,$$

respectiv

$$V_a^A = A_m, a \in A_m, \quad V_b^B = B_n, b \in B_n,$$

şi — vezi (3.2) —

$$\mathrm{Fr}\,(A_m) \cup \mathrm{Fr}\,(B_n) \subseteq \mathrm{Fr}\,((\alpha, \beta)) = \{\alpha, \beta\}, \quad m \in I_A, n \in I_B.$$

Cele două familii ar conţine cel puţin câte un interval: $A_{m_0} := (\alpha_{m_0}, \beta_{m_0})$ şi $B_{n_0} := (\gamma_{n_0}, \delta_{n_0})$. În plus, cum *orice două numere reale se pot compara* — adică, $\mathbb{R}$ este *total* ordonată —, am putea presupune că A_{m_0} s-ar situa "la stânga" lui B_{n_0}. Altfel spus,

$$\alpha \le \alpha_{m_0} < \beta_{m_0} \le \gamma_{n_0} < \delta_{n_0} \le \beta.$$

Atunci, mulţimea $\{\beta_{m_0}, \gamma_{n_0}\}$ ar avea cel puţin un element, notat cu ε. El s-ar găsi atât în intervalul (α, β) — mulţimea *tuturor* numerelor reale dintre α şi β! — cât şi în mulţimea

$$\mathrm{Fr}\left(\left(\alpha_{m_0}, \beta_{m_0}\right)\right) \cup \mathrm{Fr}\left(\left(\gamma_{n_0}, \delta_{n_0}\right)\right).$$

Adică, ε, punct *interior* al intervalului (α, β), ar fi sau α sau β.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 3.3. *([10, pag. 65])* Fie $a, b, \alpha > 0$ şi t_0, x_0 numere reale fixate, cu $\alpha \le a$. Introducem dreptunghiul închis

$$K := I_{t_0,a} \times I_{x_0,b}, \text{ unde } I_{u,v} := [u - v, u + v] \text{ pentru orice } v > 0, u \in \mathbb{R},$$

numit *cutia* problemei cu *centrul* în (t_0, x_0) şi *dimensiunile* $(2a) \times (2b)$. Se dau funcţiile $x : I_{t_0,\alpha} \to I_{x_0,b}$, de clasă C^1, şi $f : K \to \mathbb{R}$ continuă în raport[4] cu topologiile uzuale, cea a planului $\mathbb{R}^2$, respectiv cea a dreptei $\mathbb{R}$.

Atunci, aplicaţia

$$I_{t_0,\alpha} \ni t \longmapsto f(t, x(t))$$

este continuă (în raport cu topologia uzuală).

Soluţia exerciţiului 3.3. Aplicaţia se descompune în funcţiile

$$t \longmapsto (t, x(t)), \quad (u, v) \longmapsto f((u, v)) \equiv f(u, v).$$

Fie $(u_0, v_0) \in K$ fixat. Continuitatea lui f, în raport cu *ansamblul variabilelor sale*, se formulează în termeni de ε-şi-δ: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_f = \delta_f(\varepsilon, u_0, v_0)$ astfel încât

$$|f(u_0, v_0) - f(u, v)| < \varepsilon \text{ dacă } \|(u_0, v_0) - (u, v)\|_2 < \delta_f, \quad (u, v) \in K.$$

Conform Exerciţiului 3.1, numărul δ_f poate fi ales *independent* de punctul (u_0, v_0) — *uniform continuitatea* lui f —.

Fie $X := \sup_{\xi \in I_{t_0,\alpha}} |x'(\xi)|$. Atunci, *via* teorema creşterilor finite, observăm că

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le X \cdot |t_1 - t_2|, \quad t_{1,2} \in I_{t_0,\alpha}.$$

Deoarece

$$\|(t_1, x(t_1)) - (t_2, x(t_2))\|_2 \le |t_1 - t_2| + |x(t_1) - x(t_2)| \le (1 + X) \cdot |t_1 - t_2|,$$

[4] Având spaţiile topologice $(X, \mathscr{T})$, $(Y, \mathscr{G})$ şi mulţimea nevidă $A \subseteq X$, funcţia $f : A \to Y$ este *continuă pe A* dacă pentru orice mulţime $V \in \mathscr{G}$ există mulţimea $U \in \mathscr{T}$ astfel ca $f^{-1}(V) = A \cap U$. Aici, familia $\mathscr{T}_A = \{A \cap U \,|\, U \in \mathscr{T}\}$ constituie *topologia relativă* a (topologiei) spaţiului X *pe A*.

deducem că

$$|f(t_1,x(t_1))-f(t_2,x(t_2))|<\varepsilon$$

pentru orice $t_{1,2}\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$ cu

$$|t_1-t_2|<\frac{\delta_f(\varepsilon)}{1+X}.$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 3.4. *(Aproximaţiile succesive Picard [1, pag. 248].)* Fie K cutia problemei de centru $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$ şi de dimensiuni $(2a)\times(2b)$ şi funcţia continuă $f:K\to\mathbb{R}$ pentru care există numerele $M,L>0$ astfel încât

$$|f(t,x)|\le M,\quad (t,x)\in K, \tag{3.3}$$

şi

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le L\cdot|x_1-x_2|,\quad (t,x_{1,2})\in K. \tag{3.4}$$

Introducem şirul de funcţii continue $(u_n)_{n\ge0}$, cu $u_n:I_{t_0,\alpha}\to I_{x_0,b}$, prin intermediul *relaţiei de recurenţă*:

$$u_0(t)=x_0,\quad u_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,u_n(s))ds,\quad t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]. \tag{3.5}$$

Aici,

$$\alpha:=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}. \tag{3.6}$$

Atunci, şirul este *bine-definit,* adică: $u_n(I_{t_0,\alpha})\subseteq I_{x_0,b}$ implică $u_{n+1}(I_{t_0,\alpha})\subseteq I_{x_0,b}$ pentru orice număr n.

Soluţia exerciţiului 3.4. *Cazul* $t\in[t_0,t_0+\alpha]$. Au loc inegalităţile

$$\begin{aligned}|u_{n+1}(t)-x_0|&\le\int_{t_0}^{t}|f(s,u_n(s))|\,ds\le\int_{t_0}^{t}M ds\\&=M\cdot(t-t_0)\le M\alpha\\&\le b.\end{aligned}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 3.5. În contextul exerciţiului anterior,

$$|u_{n+1}(t)-u_n(t)|\le\frac{M}{L}\cdot\frac{(L\cdot|t-t_0|)^{n+1}}{(n+1)!},\quad t\in I_{t_0,\alpha},n\ge0.$$

Este convergent şirul $(u_n)_{n\geq 0}$ al aproximaţiilor Picard?

Soluţia exerciţiului 3.5. *Cazul* $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Ştim deja că

$$|u_1(t) - u_0(t)| \leq M \cdot (t - t_0).$$

Apoi,

$$\begin{aligned} |u_2(t) - u_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,u_1(s)) - f(s,u_0(s))|\, ds \\ &\leq L \cdot \int_{t_0}^{t} |u_1(s) - u_0(s)|\, ds \leq LM \cdot \int_{t_0}^{t} (s - t_0) ds \\ &= LM \cdot \frac{(t-t_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

Pentru a conclude, întrebuinţăm *inducţia* matematică.

Afirmăm că seria *(telescopică)* de funcţii [21, pag. 66]

$$\sum_{n\geq 0} f_n, \quad f_n := u_{n+1} - u_n,$$

este *absolut şi uniform convergentă pe* $I_{t_0,\alpha}$. Într-adevăr,

$$|f_n(t)| \leq a_n, \quad a_n := \frac{M}{L} \cdot \frac{(\alpha \cdot L)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in I_{t_0,\alpha}, n \geq 0.$$

Seria numerică $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ fiind convergentă — cu suma $\frac{M}{L} \cdot \left(\mathrm{e}^{\alpha L} - 1\right)$ —, concluzia rezultă din *M-testul lui Weierstrass* [20, pag. 137].

Suma seriei $u_0 + \sum\limits_{n\geq 0} f_n$ este, în consecinţă, o funcţie $u : I_{t_0,\alpha} \to I_{x_0,b}$ continuă:

$$u = \lim_{n\to+\infty} u_n. \tag{3.7}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 3.6. În contextul Exerciţiului 3.4,

$$\left|u_{n+p}(t) - u_n(t)\right| \leq \frac{A \cdot M}{L} \mathrm{e}^{\alpha L} \cdot \lambda^{n+1}, \quad t \in I_{t_0,\alpha},$$

pentru orice $n \geq [\alpha L] + 1$, $p \geq 1$. Aici, $[\star]$ desemnează *partea întreagă* a unui număr real, $A := ([\alpha L] + 1)^{[\alpha L]}$ şi $\lambda := \frac{\alpha L}{[\alpha L]+1}$.

Soluţia exerciţiului 3.6. *Cazul* $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Realizăm următoarele estimări:

$$\begin{aligned} |u_{n+p}(t) - u_n(t)| &\leq |u_{n+p}(t) - u_{n+p-1}(t)| + \cdots + |u_{n+1}(t) - u_n(t)| \\ &\leq \frac{M}{L} \cdot \left[\frac{(\alpha L)^{n+p}}{(n+p)!} + \frac{(\alpha L)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + \cdots + \frac{(\alpha L)^{n+1}}{(n+1)!}\right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{L}\cdot\frac{(\alpha L)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left[1+\frac{\alpha L}{n+2}+\frac{(\alpha L)^2}{(n+2)(n+3)}+\dots\right]$$
$$\leq \frac{M}{L}\cdot\frac{(\alpha L)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left[1+\frac{\alpha L}{1}+\frac{(\alpha L)^2}{1\cdot 2}+\dots\right]$$
$$= \frac{M}{L}\cdot\frac{(\alpha L)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot \mathrm{e}^{\alpha L},\quad n\geq 0,\, p\geq 1.$$

Apoi,

$$\frac{(\alpha L)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(\alpha L)^{n+1}}{([\alpha L])!}\cdot\frac{1}{([\alpha L]+1)([\alpha L]+2)\dots(n+1)}$$
$$\leq \frac{(\alpha L)^{n+1}}{([\alpha L])!}\cdot\frac{1}{([\alpha L]+1)^{n+1-[\alpha L]}}$$
$$\leq (\alpha L)^{n+1}\cdot\frac{([\alpha L]+1)^{[\alpha L]}}{([\alpha L]+1)^{n+1}}$$
$$= ([\alpha L]+1)^{[\alpha L]}\cdot\left(\frac{\alpha L}{[\alpha L]+1}\right)^{n+1}$$

pentru orice $n\geq [\alpha L]+1$.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 3.7. Fie $u: I_{t_0,\alpha}\to I_{x_0,b}$ limita aproximaţiilor succesive Picard, dată de relaţia (3.7). Atunci, cu notaţiile de la exerciţiul precedent,

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s,u_n(s))ds-\int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds\right|\leq \alpha AM\mathrm{e}^{\alpha L}\cdot\lambda^{n+1}, \tag{3.8}$$

pentru orice $t\in I_{t_0,\alpha}$ şi $n\geq [\alpha L]+1$.

Soluţia exerciţiului 3.7. *Cazul* $t\in[t_0,t_0+\alpha]$. Conform Exerciţiului 3.6, prin trecere la limită după p, $p\to+\infty$, avem

$$|u(t)-u_n(t)|\leq \frac{AM}{L}\mathrm{e}^{\alpha L}\cdot\lambda^{n+1},\quad t\in I_{t_0,\alpha}. \tag{3.9}$$

De asemeni, *via* (3.4),

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s,u_n(s))ds-\int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds\right|\leq L\cdot\int_{t_0}^{t}|u_n(s)-u(s)|\,ds$$
$$\leq AM\mathrm{e}^{\alpha L}\cdot\lambda^{n+1}\cdot(t-t_0),\quad n\geq[\alpha L]+1.$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 3.8. Limita $u: I_{t_0,\alpha}\to I_{x_0,b}$ a aproximaţiilor succesive Picard este *singura* soluţie admisă de ecuaţia integrală

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, \quad t \in I_{t_0,a}, \tag{3.10}$$

în cutia problemei K.

Soluţia exerciţiului 3.8. Estimările (3.9), (3.8) ne permit trecerea la limită după n, $n \to +\infty$, în relaţia de recurenţă (3.5). Soluţia u, din (3.7), are o existenţă *locală*, fiind *garantată* doar pe intervalul *mic* $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, cu α din (3.6).

Fie $y = y(t)$, cu $t \in I_{t_0,\alpha}$, *altă* soluţie a ecuaţiei (3.10). Reluând reţionamentul de la Exerciţiul 3.5, deducem că

$$|y(t) - u_0(t)| \le M \cdot |t - t_0|$$

şi

$$|y(t) - u_{k+1}(t)| \le L \cdot \left| \int_{t_0}^{t} |y(s) - u_k(s)|\, ds \right|, \quad k \ge 0,$$

peste tot în $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$. De unde [12, pag. 93],

$$|y(t) - u_n(t)| \le \frac{M}{L} \cdot \frac{(L \cdot |t-t_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{pentru orice } n \ge 0.$$

Trecând la limită după n, $n \to +\infty$, ajungem la

$$|y(t) - u(t)| \le 0, \quad t \in I_{t_0,\alpha}.$$

Cazul $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Să observăm că, fiind date soluţiile *prezumtive* $u, y : I_{t_0,\alpha} \to I_{x_0,b}$ ale ecuaţiei (3.10), funcţia $v : I_{t_0,\alpha} \to [0, +\infty)$, cu formula

$$v(t) = |y(t) - u(t)|,$$

satisface inegalitatea integrală

$$v(t) \le \int_{t_0}^{t} L \cdot v(s)ds, \quad t \ge t_0.$$

Pentru a stabili că funcţia v este *identic nulă,* fără a apela la tehnica iterativă descrisă anterior, putem utiliza fie estimarea (2.9) [10, pag. 53] — inegalitatea este de tip Gronwall-Bellman — fie tehnica de la (1.7) [21, pag. 71].

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 3.9. Fie numărul $t_0 > 0$ fixat. În Figura 3.3 este construită mulţimea deschisă Ψ. Ea este mărginită la stânga de segmentul vertical $AB := \{t_0\} \times [0,1]$, la dreapta de parabola $AC := \left\{(t,x) \,|\, x = (t-t_0)^2, t \in [t_0, t_0+1]\right\}$ şi deasupra de segmentul orizontal $BC := [t_0, t_0+1] \times \{1\}$. Fie funcţia $f : \Psi \to \mathbb{R}$ cu formula

$$f(t,x) = \frac{x}{t-t_0}, \quad (t,x) \in \Psi.$$

Atunci, problema cu *date* ori *valori* (impuse) *pe frontieră*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), & t > t_0, \\ x(t_0) = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

admite o infinitate *nenumărabilă* de soluţii.

Soluţia exerciţiului 3.9. Aici, $\mathrm{Fr}(\Psi) = AB \cup BC \cup AC$. Deoarece punctul A (al datelor impuse) nu este punct (interior) al lui Ψ, problema (3.11) *nu este* (o) problemă Cauchy.

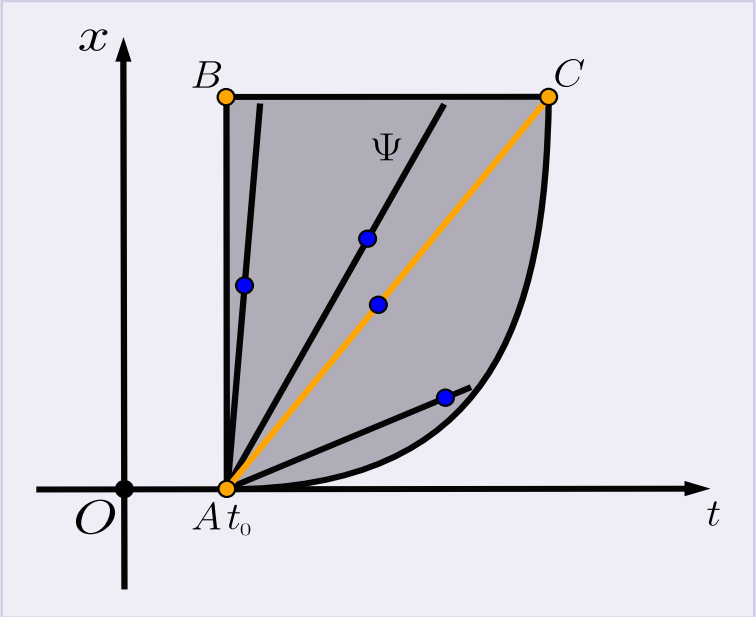


Fig. 3.3 Fiecare segment (desenat) din domeniul Ψ reprezintă *graficul* unei soluţii. În portocaliu este graficul soluţiei dată de corespondenţa $t \mapsto t - t_0$, unde $t \in [t_0, t_0 + 1)$.

Remarcăm că (semi)tangenta în punctul A la parabola AC este orizontală (axa de coordonate Ot). Semidreptele planului, care *încep* din punctul A şi au *pante* pozitive, acoperă suprafaţa Ψ.

Căutăm funcţii *continue* $x : [t_0, t_0 + \varepsilon) \to [0,1]$, de clasă C^1 *pe intervalul* $(t_0, t_0 + \varepsilon)$, care să-i fie *soluţii* problemei. Aici, $\varepsilon = \varepsilon(x) \in (0,1]$.

Pentru orice punct $(t_\star, x_\star) \in \Psi$ — figurat cu albastru — putem construi o cutie $K \subsetneq \Psi$ *mică* având centrul în punctul respectiv:

$$K = [t_\star - a, t_\star + a] \times [x_\star - b, x_\star + b],$$

unde

$$t_0 < t_\star < t_0 + \sqrt{x_\star} < t_0 + 1$$

şi

$$0 < a < \min\{t_\star - t_0, 1 - (t_\star - t_0)\} \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < b < \min\{x_\star, 1 - x_\star\} \leq \frac{1}{2},$$
$$t_\star + a < t_0 + \sqrt{x_\star - b}.$$

Ultima cerinţă poate fi restrânsă la

$$t_\star + a + \sqrt{b} < t_0 + \sqrt{x_\star}.$$

Deoarece ecuaţia este *liniară şi omogenă,* ne găsim în contextul Exerciţiilor 1.10, 3.8. Astfel, expresia aceleia din soluţiile sale al cărei grafic trece prin punctul $(t_\star, x_\star)$ este

$$x(t) = C_\star \cdot (t - t_0), t \in [t_0, t_\infty), \quad t_\infty := \begin{cases} t_0 + \frac{1}{C_\star}, C_\star > 1, \\ t_0 + C_\star, C_\star \leq 1, \end{cases} \quad C_\star := \frac{x_\star}{t_\star - t_0}.$$

Formula soluţiei x, a cărei existenţă era garantată doar pe *micul* interval $I_{t_\star,\alpha}$, a putut fi *prelungită* pe intervalul *maximal* $[t_0, t_\infty)$. Graficul soluţiei este un segment semideschis care începe în punctul A şi este inclus într-o semidreaptă cu panta $C_\star$.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 3.10. În Figura 3.4 este construită mulţimea deschisă Ψ. Ea este mărginită la stânga de parabola $AB := \{(t,x) \,|\, x = 1 + t^2, t \in [-1,0]\}$, la dreapta de parabola $AC := \{(t,x) \,|\, x = 1 + \sqrt{2t}, t \in [0, \frac{1}{2}]\}$ şi deasupra de segmentul orizontal $BC := [-1, \frac{1}{2}] \times \{2\}$. Fie funcţia $f : \Psi \to \mathbb{R}$ cu formula

$$f(t,x) = x^2, \quad (t,x) \in \Psi.$$

Atunci, problema cu date pe frontieră

$$\begin{cases} x' = f(t,x), & t > 0, \\ x(0) = 1, \end{cases} \tag{3.12}$$

nu admite nicio soluţie.

Soluţia exerciţiului 3.10. Soluţiile (prezumtive ale) acestei probleme sunt funcţii continue $x : [0, \varepsilon) \to [1,2]$, de clasă C^1 pe intervalul $(0, \varepsilon)$. Aici, $\varepsilon = \varepsilon(x) \in (0, \frac{1}{2}]$.

La fel ca la exerciţiul anterior, pentru orice punct $(t_\star, x_\star) \in \Psi$ — figurat cu albastru — putem construi o cutie $K \subsetneq \Psi$ având centrul în punctul respectiv:

$$K = [t_\star - a, t_\star + a] \times [x_\star - b, x_\star + b],$$

unde

$$-1 < -\sqrt{x_\star - 1} < t_\star < \frac{(x_\star - 1)^2}{2}$$

şi

$$0 < a < \min\left\{1 + t_\star, \frac{1}{2} - t_\star\right\} \le \frac{3}{4}, \quad 0 < b < \min\{x_\star - 1, 2 - x_\star\} \le \frac{1}{2},$$
$$x_\star - 1 - b > \max\left\{\sqrt{2\max\{t_\star + a, 0\}}, (|t_\star| + a)^2\right\}.$$

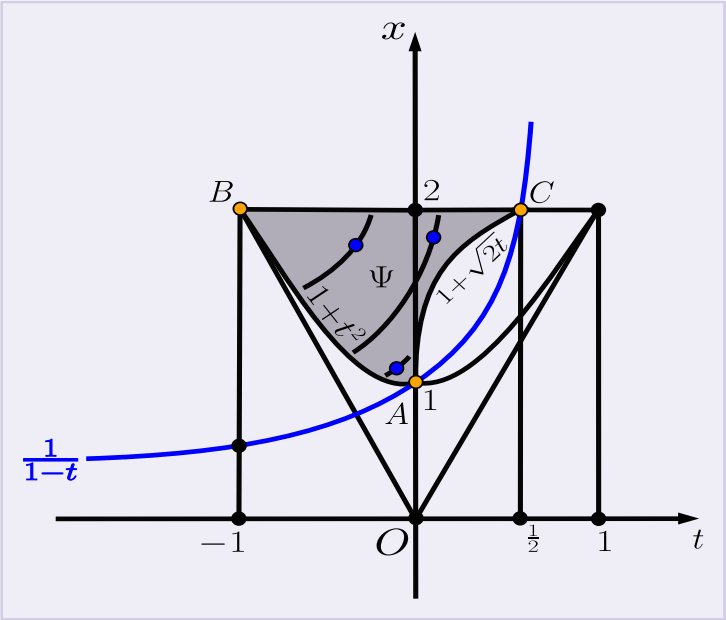


Fig. 3.4 Graficele soluţiilor ecuaţiei $x' = x^2$, atunci când *intersectează* axa verticală *Ox*, o pot face doar *deasupra* punctului *A*.

Ne găsim în contextul Exerciţiului 3.8. Răsturnând ecuaţia, obţinem formula singurei sale soluţii al cărei grafic trece prin punctul $(t_\star, x_\star)$:

$$x(t) = \frac{1}{C_\star - t}, t \in I_{t_\star,\alpha}, \quad C_\star := \frac{1}{t_\star + \frac{1}{x_\star}}.$$

Afirmăm că, *dacă graficul acestei soluţii,* presupusă a fi definită pe intervalul maximal de existenţă (α, β), *intersectează axa Ox, atunci punctul de intersecţie se găseşte* deasupra *lui A* — punctul datelor impuse —.

Punctul de intersecţie este $\left(0, \frac{1}{C_\star}\right)$. Dacă $t_\star < 0$, atunci

$$1 < 1 + t_\star^2 < x_\star = x(t_\star) < x(0) = \frac{1}{C_\star},$$

deoarece x este strict crescătoare pe (α, β).

Dacă $t_\star = 0$, atunci $C_\star = x_\star > 1$ pentru că $\Psi \cap Ox = \{0\} \times (1,2)$.

Să presupunem că $t_\star > 0$. Introducem funcţia auxiliară $F : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0, +\infty)$ pe baza formulei

$$F(u) = u + \frac{1}{1 + \sqrt{2u}}, \quad u \geq 0,$$

şi stabilim că ea este *convexă* — "ţine apă" [13, pag. 225] — şi că $F(0) = F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. De unde,

$$F(u) < 1 \quad \text{pentru orice } u \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Sunt valabile estimările

$$C_\star = t_\star + \frac{1}{x_\star} < F(t_\star) < 1.$$

Afirmaţia a fost, aşadar, probată.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Capitolul 4
Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile, de ordinul întâi

Fie $t_0 < t_1, x_0 < x_1$ numere reale fixate şi funcţiile $a : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$, $g : (x_0, x_1) \to \mathbb{R}$ continue. Ne interesează problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot g(x), \\ x(t_2) = x_2, \end{cases} \tag{4.1}$$

unde $(t_2, x_2) \in \Psi := (t_0, t_1) \times (x_0, x_1)$.

Factorizarea membrului drept al ecuaţiei diferenţiale din problemă,

$$x' = f(t,x), \quad f : \Psi \to \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

adică exprimarea sa drept

$$f(t,x) = a(t) \cdot g(x), \tag{4.3}$$

ne permite să "preparăm" *separat*, în continuare, mărimile funcţionale $G = G(x)$ şi $A = A(t)$ cu care vom construi *integrala generală* a ecuaţiei.

Exerciţiul 4.1. Fie numărul $\varepsilon \in (0, \min\{x_2 - x_0, x_1 - x_2\})$ astfel încât

$$g(u) \neq 0 \quad \text{pentru orice } u \in I_{x_2,\varepsilon}. \tag{4.4}$$

Atunci, funcţia $G : I_{x_2,\varepsilon} \to \mathbb{R}$, cu formula

$$G(u) = \int_{x_2}^{u} \frac{d\xi}{g(\xi)}, \quad u \in I_{x_2,\varepsilon}, \tag{4.5}$$

este *injectivă* iar 0 îi este *punct interior* mulţimii $G(I_{x_2,\varepsilon})$.

Soluţia exerciţiului 4.1. Cum g este continuă, ea are proprietatea valorii intermediare. Astfel, g va avea *semn constant nenul* în $I_{x_2,\varepsilon}$, ceea ce face posibilă *definirea* funcţiei G. Apoi, $G'(u) = \frac{1}{g(u)} \neq 0$, unde $u \in I_{x_2,\varepsilon}$, deci G' are acelaşi semn (nenul) ca şi g. De aici, G va fi *monotonă* pe *mica* vecinătate a datei impuse x_2. Ori, monotonia (strictă a) unei funcţii îi implică injectivitatea.

Presupunem că *G este (strict) crescătoare*. Atunci,

$$G(x_2-\varepsilon)=\min_{u\in I_{x_2,\varepsilon}} G(u),\quad G(x_2+\varepsilon)=\max_{u\in I_{x_2,\varepsilon}} G(u),\quad G\left(I_{x_2,\varepsilon}\right)\subseteq J,$$

unde $J:=[G(x_2-\varepsilon),G(x_2+\varepsilon)]$. Evident,

$$G(x_2-\varepsilon)<G(x_2)=0,\quad G(x_2+\varepsilon)>0.$$

Cum şi G are proprietatea valorii intermediare, $G\left(I_{x_2,\varepsilon}\right)=J$ [13, pag. 103].

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.2. În contextul exerciţiului anterior, fie numărul $\delta\in(0,\min\{t_2-t_0,\ t_1-t_2\})$ cu proprietatea că

$$A(t)\in J,\quad t\in I_{t_2,\delta},$$

unde funcţia $A:I_{t_2,\delta}\to\mathbb{R}$ este dată de formula

$$A(t)=\int_{t_2}^{t} a(s)ds,\quad t\in I_{t_2,\delta}. \tag{4.6}$$

Atunci, aplicaţia

$$t\longmapsto G^{-1}(A(t)),\quad t\in[t_2-\delta,t_2+\delta],$$

îi este *soluţie* problemei (4.1).

Soluţia exerciţiului 4.2. Funcţia A, definită pe o *mică* vecinătate a datei impuse t_2, fiind continuă, *mulţimea* $A\left(I_{t_2,\delta}\right)$ *este* (un) *interval* [16, pag. 229] *de numere reale*:

$$A\left(I_{t_2,\delta}\right)=[\alpha,\beta],\quad 0=A(t_2)\in[\alpha,\beta].$$

Cum 0 îi este punct interior intervalului J, alegând (un) δ suficient de *mic*, concludem că $[\alpha,\beta]\subset J$, adică *funcţia A este bine-definită*.

Introducem funcţia $x:I_{t_2,\delta}\to I_{x_2,\varepsilon}$ prin intermediul expresiei

$$x(t)=G^{-1}(A(t))\quad\text{pentru orice } t\in[t_2-\delta,t_2+\delta]. \tag{4.7}$$

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}
x'(t)&=\frac{d}{dt}\left[G^{-1}(A(t))\right]=\left(G^{-1}\right)'(A(t))\cdot\frac{d}{dt}[A(t)]\\
&=\left(G^{-1}\right)'(G(x(t)))\cdot a(t)\\
&=\frac{1}{G'(x(t))}\cdot a(t)\\
&=g(x(t))\cdot a(t),\quad t\in I_{t_2,\delta}.
\end{aligned}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.3. Arătaţi că restricţia (4.4) este *suficientă* pentru *chestiunea unicităţii*: problema (4.1) posedă o (singură) soluţie în *micul* interval $I_{t_2,\delta}$.

Soluţia exerciţiului 4.3. Fie $y : I_{t_2,\eta} \to I_{x_2,\varepsilon}$ o *prezumtivă* soluţie a problemei (4.1). Aici, $0 < \eta \leq \delta$ şi $\eta = \eta(y)$.

Cum $g(y(t)) \neq 0$ peste tot în $I_{t_2,\eta}$, sunt valabile egalităţile

$$\begin{aligned} G(y(t)) &= G(y(t)) - G(y(t_2)) = \int_{y(t_2)}^{y(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_2}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds \\ &= \int_{t_2}^{t} a(s)ds = A(t) \\ &= G(x(t)), \end{aligned}$$

unde funcţia x a fost definită în (4.7).

Funcţia G fiind injectivă, ajungem la $y = x$.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.4. Să presupunem că $0 \notin g((x_0,x_1))$. Fie punctul $(t_2,x_2) \in \Psi$ fixat. Introducem funcţiile $G : (x_0,x_1) \to \mathbb{R}$, $A : (t_0,t_1) \to \mathbb{R}$ pe baza formulelor (4.5), (4.6). Atunci, ecuaţia diferenţială (4.2) admite integrala generală

$$m(t,x,C) = G(x) - A(t) + C = 0, \quad C \in K \subseteq \mathbb{R}.$$

Soluţia exerciţiului 4.4. Fie $y : I_{t_3,\delta} \to I_{x_3,\varepsilon}$ o soluţie a ecuaţiei (4.2), unde numerele reale $\delta, \varepsilon > 0$ şi t_3, x_3, cu $x_3 := y(t_3)$, au fost fixate astfel încât

$$I_{t_3,\delta} \times I_{x_3,\varepsilon} \subsetneq \Psi.$$

Avem relaţiile

$$\begin{aligned} G(y(t)) - A(t) &= \int_{x_2}^{y(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_2}^{t} a(s)ds \\ &= \left[\int_{x_3}^{y(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} + \int_{x_2}^{x_3} \frac{du}{g(u)} \right] - \left[\int_{t_3}^{t} a(s)ds + \int_{t_2}^{t_3} a(v)dv \right] \\ &= \int_{x_2}^{x_3} \frac{du}{g(u)} - \int_{t_2}^{t_3} a(v)dv, \quad t \in I_{t_3,\delta}. \end{aligned}$$

Am găsit *constanta de integrare* $C_\star$ corespunzătoare *integralei particulare* a ecuaţiei pe care o procură soluţia y:

$$\begin{aligned} C_\star &:= -\int_{x_2}^{x_3} \frac{du}{g(u)} + \int_{t_2}^{t_3} a(v)dv \in K, \\ K &:= \{v - u \,|\, u \in G((x_0,x_1)), v \in A((t_0,t_1))\}. \end{aligned}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.5. *([14, pag. 271])* Rezolvaţi ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+x^2}{1+t^2}.$$

Soluţia exerciţiului 4.5. Optăm pentru $\Psi := (-1,1)\times(-1,1)$ şi $t_2, x_2 := 0$. Sunt verificate ipotezele Exerciţiului 4.4. Atunci,

$$G(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \arctan x, \quad A(t) = \int_0^x \frac{ds}{1+s^2} = \arctan t,$$

de unde

$$m(t,x,C) = \arctan x - \arctan t + C = 0, \quad C \in K := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.8}$$

Aceasta pentru că $\arctan((-1,1)) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Aplicând funcţia "tan" în ambii membri ai egalităţii (4.8), ajungem la ($D := -\tan C$)

$$x = \frac{D+t}{1-D\cdot t}, \quad D \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Ne punem întrebarea: *de unde ştim că nu s-au "pierdut" soluţii la construcţia din (4.9)?* Utilizarea lui "tan" a impus o restrângere a mulţimii K a valorilor lui C, situaţie care, în principiu, trebuie analizată. În cazul de faţă, formula (4.9) oferă soluţii definite pe $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{D}\right\}$, când $D \neq 0$. Lui $D = 0$ îi corespunde funcţia *identitate* a lui $\mathbb{R}$. Cum ecuaţia satisface *chestiunea unicităţii,* concludem că nu mai există alte (formule de) soluţii.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.6. *1)* Fie funcţiile $f_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin expresiile din acolade

$$f_1(u) = \begin{cases} u\cdot\sin\left(\frac{1}{u}\right), & u \neq 0, \\ 0, & u = 0 \end{cases} \quad \text{şi ([21, pag. 138])} \quad f_2(u) = \begin{cases} u\cdot\ln u, & u > 0, \\ 0, & u \leq 0. \end{cases}$$

Rezolvaţi problemele Cauchy

$$\begin{cases} x' = f_i(x), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad i \in \overline{1,2}.$$

2) ([21, pag. 139]) Arătaţi că *problema iniţială*

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x}, & t > 0, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

admite, *în afară de* soluţia identic nulă, (şi) familia *uniparametrică* de soluţii $(x_T)_{T\geq 0}$ date prin expresiile din acoladă

$$x_T(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,T], \\ \frac{(t-T)^2}{4}, & t > T, \end{cases} \quad \text{pentru orice } T \geq 0.$$

Soluţia exerciţiului 4.6. *1) Cazul lui* f_1. Observăm că

$$|f_1(u)| \leq |u|, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Dacă $x : I_{0,\varepsilon} \to \mathbb{R}$, unde $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, este o *prezumtivă* soluţie a problemei, atunci,

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left| x(0) + \int_0^t f_1(x(s))ds \right| \leq |x(0)| + \left| \int_0^t |f_1(x(s))|\, ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t |x(s)|\, ds \right|, \quad t \in I_{0,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Pe baza inegalităţii Gronwall-Bellman, stabilim că

$$|x(t)| \leq 0, \quad t \in I_{0,\varepsilon}.$$

Soluţia problemei este, aşadar, funcţia *identic nulă*.

Afirmăm că funcţia f_1 *nu este lipschitziană* în jurul punctului 0, adică nu există numere $L > 0$, $\tau \in (0,1)$ cu proprietatea că

$$|f_1(u) - f_1(v)| \leq L \cdot |u - v| \quad \text{pentru orice } u, v \in (-\tau, \tau).$$

Pentru a proba acest fapt, să fixăm numărul $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ şi numărul natural $n \geq 1$. Atunci,

$$2n\pi \cdot \cos\theta - \sin\theta > \cos\theta - \sin\theta > 0.$$

Fie $u, v \in \left[\frac{1}{2n\pi+\theta}, \frac{1}{2n\pi}\right]$, cu $u \neq v$. *Via* teorema de medie (Lagrange), există $\xi \in [\min\{u,v\}, \max\{u,v\}]$ astfel încât

$$f_1(u) - f_1(v) = f_1'(\xi) \cdot (u - v), \quad f_1'(\xi) = \sin\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi} \cdot \cos\frac{1}{\xi}.$$

Cum

$$\cos\frac{1}{\xi} \in [\cos\theta, 1], \quad \sin\frac{1}{\xi} \in [0, \sin\theta],$$

deducem că

$$0 > \sin\theta - 2n\pi \cdot \cos\theta \geq f_1'(\xi) \geq -(2n\pi + \theta),$$

respectiv

$$|f_1(u) - f_1(v)| \geq (2n\pi \cdot \cos\theta - \sin\theta) \cdot |u - v|.$$

Ultima estimare ne permite, întrebuinţând metoda *reducerii la absurd* şi exploatând faptul că $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n\pi\cdot\cos\theta-\sin\theta)=+\infty$ şi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}=0$, să încheiem justificarea Afirmaţiei.

2) Aici, $\Psi:=(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, deci problema iniţială

$$\begin{cases} x'=f(t,x), \\ x(0)=0, \end{cases} \qquad f:\Psi\to\mathbb{R},\, f(t,x)=\begin{cases} \sqrt{x},\ x\geq 0, \\ 0, \quad x<0, \end{cases}$$

este o problemă *cu date* (impuse) *pe frontieră*: $(0,0)\in \mathrm{Fr}\,(\Psi)$. Ne interesează, ca *soluţii*, funcţiile $x:[0,\omega)\to[0,+\infty)$, unde $\omega=\omega(x)>0$, *continue* pe $[0,\omega)$ şi *de clasă* C^1 pe $(0,\omega)$. Folosind *expresia* membrului drept al ecuaţiei şi continuitatea lui x în punctul 0, deducem că orice asemenea soluţie admite derivată *laterală* nulă în punctul 0. Aşadar, x va fi de clasă C^1 pe intervalul $[0,\omega)$:

$$x'=\sqrt{x}, \quad t\geq 0.$$

Căutăm o soluţie x care să ia valori (strict) pozitive în *trecutul apropiat* $[t-\varepsilon,t]$. Dacă ea ar exista, atunci

$$\frac{x'(s)}{\sqrt{x(s)}}=1,\, s\in[t-\varepsilon,t], \quad \int_{t-\varepsilon}^{t}\frac{x'(s)}{\sqrt{x(s)}}ds=\int_{x(t-\varepsilon)}^{x(t)}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}=\varepsilon,$$

respectiv

$$x(t)=\frac{1}{4}\cdot[4\cdot x(t-\varepsilon)+\varepsilon]^2.$$

Aproximându-l pe $x(t-\varepsilon)$ cu 0, găsim formula soluţiilor x_T.

Această formulă "transpare" şi din inegalitatea lui Ouyang. Mai precis, dacă dispunem de o soluţie $x:[0,t_\star]\to[0,+\infty)$, unde $t_\star>0$ este fixat, atunci

$$x(t)=x(T)+\int_T^t\sqrt{x(s)}ds, \quad t\in[T,t_\star],\, 0\leq T<t_\star,$$

ceea ce se reorganizează drept

$$\frac{\left[\sqrt{x(t)}\right]^2}{2}\leq\frac{\left[\sqrt{x(T)}\right]^2}{2}+\int_T^t\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x(s)}ds$$

şi ne conduce la estimarea apriorică

$$\sqrt{x(t)}\leq\sqrt{x(T)}+\int_T^t\frac{1}{2}ds=\frac{t-T}{2}, \quad t\in[T,t_\star].$$

Soluţia identic nulă a problemei iniţiale *nu este* (o) soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale din problemă. Aceasta pentru că prin *fiecare* punct $(T,0)$, unde $T\geq 0$, al

graficului său (semiaxa orizontală pozitivă *Ot* împreună cu originea *O* a reperului) trece şi graficul soluţiei x_T. Ea îi este soluţie *singulară* [21, pag. 135] ecuaţiei.

1) Cazul lui f_2. Aplicăm tehnica de la punctul *2)*. Astfel, dacă *prezumtiva* soluţie x ia valori (strict) pozitive pe intervalul $[t-\varepsilon, t]$, atunci

$$x(t) = [x(t-\varepsilon)]^{\exp(\varepsilon)}.$$

Aici, "exp" desemnează aplicaţia $u \mapsto \mathrm{e}^u$.

Subcazul $t > 0$. Ajungem la egalitatea

$$x(t) = [x(T)]^{\exp(t-T)}, t \geq T, \quad \text{pentru orice } x(T) > 0, T > 0.$$

Variindu-l pe T, $T \searrow 0$, pentru t *fixat*[1], concludem că $x(t) = 0$.

Subcazul $t < 0$. Este valabilă egalitatea

$$x(t) = [x(T)]^{\exp(t-T)}, t \in [T, 0), \quad \text{pentru orice } x(T) > 0, T < 0.$$

Atunci, ţinând (iarăşi) seama de continuitatea lui x în punctul 0, deducem că

$$0 = x(0) = \lim_{t \nearrow 0} x(t) = [x(T)]^{\exp(-T)} > 0.$$

În concluzie, soluţia problemei este funcţia *identic nulă*.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.7. Fie funcţia $h : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ continuă. Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$x' = -\frac{2x}{t} + h\left(t^2 x\right), \quad t \geq 1.$$

1) Stabiliţi că *există* soluţii de forma

$$x(t) = \frac{C(t)}{t^2} \quad \text{pentru orice } t \geq 1,$$

unde funcţia C este de clasă C^1.

2) Arătaţi că *toate* soluţiile sunt de această formă.

3) Demonstraţi că ecuaţia *algebrică* de gradul al treilea

$$u^3 + 3u + a = 0,$$

cu $a \in \mathbb{R}$ fixat, admite o (singură) soluţie *reală*, şi anume

$$u = \sqrt[3]{U} - \frac{1}{\sqrt[3]{U}}, \quad U := \frac{2}{a + \sqrt{a^2 + 4}}.$$

[1] Întrebuinţăm *criteriul cleştelui* [13, pag. 84] privitor la limite de funcţii şi ţinem seama de dubla inegalitate $0 < x(t) \leq x(T)$, unde $t \geq T$, valabilă pentru $x(T) \in (0, 1)$, şi de continuitatea lui x în punctul 0.

4) Integraţi[2] problema iniţială

$$\begin{cases} x' = -\frac{2x}{t} + \frac{1}{t^4x^2+1}, & t \geq 1, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 4.7. *1)* Fie $x : [1, 1+\delta] \to \mathbb{R}$, unde $\delta = \delta(x) > 0$, o *prezumtivă* soluţie a ecuaţiei. Atunci,

$$\frac{d}{dt}\left[t^2 \cdot x(t)\right] = t^2 \cdot h\left(t^2 \cdot x(t)\right), \quad t \in [1, 1+\delta].$$

Această reorganizare a ecuaţiei din enunţ ne conduce la ecuaţia diferenţială

$$C' = t^2 \cdot h(C), \quad t \in \left(\frac{1}{2}, 1+\zeta\right), \text{ cu } \zeta > 0 \text{ fixat.}$$

Observăm că h se supune restricţiei (4.4) *peste tot*.

Ne găsim în ipotezele Exerciţiului 4.2: putem, aşadar, construi asemenea funcţii C.

2) Mărimile C se extrag din ecuaţia *funcţională*:

$$\int_{C(1)}^{C(t)} \frac{d\xi}{h(\xi)} = \frac{t^3-1}{3}, \quad t \in [1, 1+\delta], \delta = \delta(C(1)) > 0, \tag{4.10}$$

adică, în contextul Exerciţiului 4.4, din integrala

$$m(t, C(t), 0) = 0, \quad t \in [1, 1+\delta].$$

4) Aici, $h(u) = \frac{1}{1+u^2}$ pentru orice $u \in \mathbb{R}$ şi $C(1) = 0$. Ecuaţia funcţională (4.10) devine

$$[C(t)]^3 + 3 \cdot C(t) = t^3 - 1, \quad t \geq 1.$$

Integrala soluţiei — ecuaţia diferenţială satisface *chestiunea unicităţii* — este

$$t^6x^3 + 3t^2x - t^3 + 1 = 0, \quad t \geq 1.$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.8. *([21, pag. 125])* Integraţi ecuaţia

$$x' - 1 = \left(\frac{2-x'}{x}\right)^2.$$

[2] Adică, *rezolvaţi* ecuaţia diferenţială a problemei şi obţineţi integrala generală a ei. În plus, calculul unei *primitive,* deci realizarea de prelucrări ale unei *integrale nedefinite,* este numit în cărţile clasice de ecuaţii diferenţiale (a face o) *cvadratură* sau *cuadratură*. Conform [21, pp. 8, 22, 173].

Soluţia exerciţiului 4.8. Fiind de clasă C^1, o soluţie $x = x(t)$ *oarecare* a ecuaţiei va avea *semn constant nenul* peste tot. În plus, cum $x'(t) \geq 1$ pentru orice t, soluţia $x : I \to x(I)$ este *bijectivă*. Aici, I şi $J := x(I)$ sunt intervale deschise din $\mathbb{R}$ iar $x^{-1} : J \to I$, adică $t = t(x)$, este şi ea *de clasă* C^1, conform teoremei de inversiune locală.

Putem, aşadar, *răsturna* ecuaţia:

$$\frac{dt}{dx} - \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{dt}{dx} - 1\right)^2,$$

respectiv

$$\left(t'\right)^2 - t' + \frac{1}{x^2+4} = 0.$$

Am ajuns la o ecuaţie de *ordinul* întâi (ca ecuaţie *diferenţială*) şi de *gradul* al doilea (ca ecuaţie *algebrică*) [21, pag. 115].

Rezolvând-o ca ecuaţie algebrică, obţinem două ecuaţii diferenţiale *independente* [21, pag. 120]:

$$t' = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) \quad \text{şi} \quad t' = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right).$$

Aceasta pentru că funcţia t' are *proprietatea valorii intermediare* (Darboux), deci nu va putea fi egală cu "soluţia cu minus" (în faţa radicalului) pe o submulţime nevidă A a lui I şi (totodată) egală cu "soluţia cu plus" pe complementara nevidă $I \backslash A$ a ei. Mai precis, t' nu poate lua valori mai mari ca $\frac{1}{2}$ pe A şi valori mai mici ca $\frac{1}{2}$ pe $\mathbb{R} \backslash A$ fără a lua (şi) valoarea $\frac{1}{2}$, ceea ce ar presupune anularea lui x (într-un punct t).

Integralele generale ale celor două ecuaţii,

$$2t = x - \sqrt{x^2+4} + C_1 \quad \text{şi} \quad 2t = x + \sqrt{x^2+4} + C_2, \quad C_{1,2} \in \mathbb{R},$$

pot fi "îmbinate" în formula

$$2t - C - x = \pm\sqrt{x^2+4}, \quad C \in \mathbb{R},$$

dacă avem în vedere regula: *fie semnul* $+$ *peste tot fie semnul* $-$ *peste tot.*

Mai departe, prin ridicare la pătrat,

$$\begin{aligned} x &= t - \frac{C}{2} - \frac{2}{2t - C} \\ &= t + D - \frac{1}{t+D}, D := -\frac{C}{2}, \quad t \in \mathbb{R} \backslash \{-D\}, D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.9. În Figura 4.1 este construită mulţimea deschisă Ψ. Ea este mărginită de semidreptele OB şi OC, aşezate simetric faţă de prima bisectoare OF a reperului

Otx. Fie funcţia $f : \Psi \to \mathbb{R}$ cu formula

$$f(t,x) = -\sqrt{\frac{x}{t}}, \quad (t,x) \in \Psi.$$

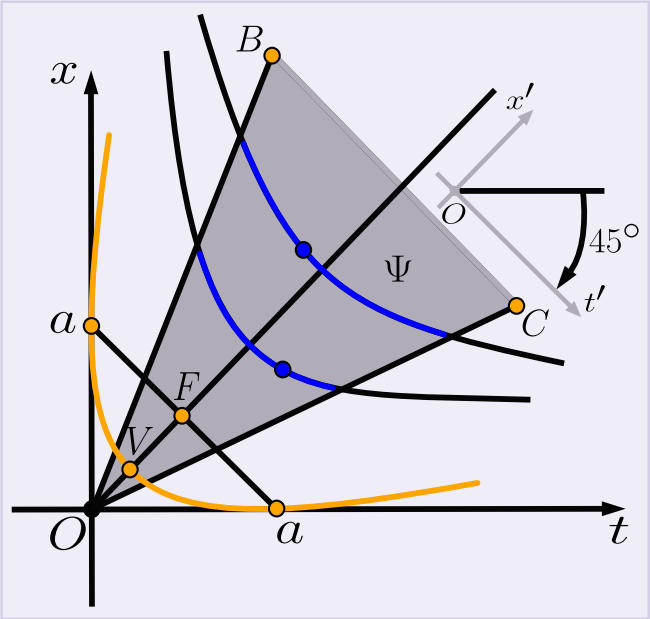


Fig. 4.1 Fiecare arc de curbă (colorat în albastru) din domeniul Ψ reprezintă *graficul* unei soluţii. Şi prin punctul V trece graficul unei asemenea soluţii, însă fără a putea "ieşi" din arcul subîntins de segmentul cu capetele $(a,0)$ şi $(0,a)$ al *parabolei* portocalii de ecuaţie $(t-a)^2+(x-a)^2-2tx=a^2$. Ecuaţia arcului este $\sqrt{t}+\sqrt{x}=\sqrt{a}$. Pentru a se afla pe parabolă, fie *deasupra* lui $(0,a)$ fie *la dreapta* lui $(a,0)$, puncte din graficul său, soluţia $x=x(t)$ ar trebui să fie strict crescătoare! Aici, $V\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ este *vârful* parabolei, $F\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ *focarul* ei iar dreapta OF prima bisectoare. Reperul cartezian $Ot'x'$, figurat în gri, este rotit cu 45° în sens *invers trigonometric* faţă de reperul *Otx*.

1) ([13, pp. 187, 481]) Fie numărul $a>0$ fixat. Arătaţi că mulţimea punctelor (t,x), din cadranul I al reperului *Otx*, ale căror coordonate verifică relaţia

$$\sqrt{t}+\sqrt{x}=\sqrt{a} \tag{4.11}$$

se găsesc pe parabola de vârf $V\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ şi de focar $F\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ care este tangentă în punctul $(a,0)$ la axa Ot şi în punctul $(0,a)$ la axa Ox.

2) Rezolvaţi ecuaţia

$$x' = f(t,x).$$

Soluţia exerciţiului 4.9. *1)* Rotim reperul Otx cu 45° în sens invers trigonometric (sensul "acelor de ceasornic") şi obţinem reperul $Ot'x'$. Legătura *biunivocă* dintre ele este dată de relaţiile dintre coordonatele corespunzătoare[3]:

$$\begin{cases} t' = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-x), \\ x' = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t+x), \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t'+x'), \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-t'+x'). \end{cases}$$

Ecuaţia (4.11) se rescrie ca

$$\sqrt{t'+x'} + \sqrt{-t'+x'} = \sqrt{a\sqrt{2}},$$

de unde

$$\left(t'\right)^2 = a\sqrt{2}\cdot\left(x' - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right). \tag{4.12}$$

Translatăm reperul $Ot'x'$ în lungul primei bisectoare — $t' = 0$ — a reperului Otx şi construim reperul $O''t''x''$. Legătura dintre coordonatele corespunzătoare are forma:

$$\begin{cases} t'' = t', \\ x'' = x' - \frac{a}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Aici, $O'' = V$.

Am ajuns la ecuaţia *canonică* a parabolei:

$$\left(t''\right)^2 = 2p\cdot x'', \quad p := \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Focarul F are coordonatele 0 şi $\frac{p}{2}$ în reperul $O''t''x''$ [13, pag. 17].

În reperul $Ot'x'$, axele reperului Otx au ecuaţiile:

$$Ot:\ -t'+x' = 0, \quad Ox:\ t'+x' = 0.$$

Astfel, *via* (4.12), parabola şi axa Ot au în comun punctul *dublu* $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ — adică, două puncte *suprapuse* —:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(t'\right)^2 - a\sqrt{2}\cdot x' + \frac{a^2}{2} = \left(t'\right)^2 - a\sqrt{2}\cdot t' + \frac{a^2}{2} \\ &= \left(t' - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad x' = t' = \frac{a}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

iar parabola şi axa Ox punctul dublu $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$:

[3] Aici, accentele nu desemnează derivate!

$$0 = \left(t'\right)^2 - a\sqrt{2}\cdot x' + \frac{a^2}{2} = \left(t'\right)^2 + a\sqrt{2}\cdot t' + \frac{a^2}{2}$$
$$= \left(t' + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad -x' = t' = -\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Exprimată în reperul Otx, ecuaţia (4.12) se prezintă drept:

$$(t-a)^2 + (x-a)^2 - 2tx = a^2.$$

În sfârşit, fiind date parabolele $\mathscr{P}_{a_i}$, unde $i \in \overline{1,2}$ şi $a_1 \neq a_2$, $a_{1,2} > 0$,

$$\mathscr{P}_{a_i} : (t-a_i)^2 + (x-a_i)^2 - 2tx = a_i^2,$$

forma ecuaţiei (4.11) face ca arcele $\mathscr{A}_{a_i}$, subîntinse de segmentele de extremităţi $(a_i, 0)$ şi $(0, a_i)$, să fie disjuncte. În caz contrar,

$$\sqrt{a_1} = \sqrt{t_\star} + \sqrt{x_\star} = \sqrt{a_2}, \quad \text{unde } (t_\star, x_\star) \in \mathscr{A}_{a_1} \cap \mathscr{A}_{a_2}.$$

Aşadar, *arcele albastre din domeniul Ψ sunt disjuncte două câte două!*

2) Fixăm numărul $\alpha \in (0,1)$ pentru care ecuaţiile semidreptelor OB şi OC să se scrie drept

$$OB : x = \frac{1}{\alpha}\cdot t, t > 0, \quad OC : x = \alpha \cdot t, t > 0.$$

Fie punctul $(t_0, x_0) \in \Psi$ oarecare — colorat în albastru în Figura 4.1 — şi numerele a, b cu

$$0 < a < \min\left\{t_0 - \alpha x_0, \frac{x_0 - \alpha t_0}{\alpha}\right\}, \quad 0 < b < \min\left\{x_0 - \alpha t_0, \frac{t_0 - \alpha x_0}{\alpha}\right\}.$$

Atunci, cutia K a problemei, de centru (t_0, x_0) şi de dimensiuni $(2a) \times (2b)$, este inclusă în Ψ.

Introducem funcţiile $G : I_{x_0,b} \to \mathbb{R}$ şi $A : I_{t_0,a} \to \mathbb{R}$, cu formulele

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{x} - \sqrt{x_0}, \quad A(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{t_0} - \sqrt{t}$$

pentru orice x, t.

Soluţia (unică a) problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

are formula — integrala particulară —

$$\sqrt{t} + \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a := \left(\sqrt{t_0} + \sqrt{x_0}\right)^2.$$

O remarcă privind apariţia unei soluţii *singulare*. Fie numărul $\omega > 0$ fixat. Să considerăm problema *finală*

$$\begin{cases} x' = h(t,x),\, h : \Omega \to \mathbb{R}, \\ x(\omega) = 0, \end{cases} \qquad \Omega := (0,\omega) \times \mathbb{R},\, h(t,x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{x}{t}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Drept *soluţii* ale acestei probleme cu *date* (impuse) *pe frontieră* — $(\omega,0) \in \mathrm{Fr}\,(\Omega)$ — considerăm funcţiile *continue* $x : (0,\omega] \to [0,+\infty)$, *de clasă* C^1 pe $(0,\omega)$.

Atunci, prin fiecare punct $(T,0)$, unde $0 < T \leq \omega$, al axei Ot trece, *în afară* de graficul *soluţiei identic nule,* şi graficul soluţiei $x_T : (0,\omega] \to [0,+\infty)$ cu formula

$$x_T(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{T} - \sqrt{t}\right)^2, & t \in (0,T), \\ 0, & t \in [T,\omega]. \end{cases}$$

Soluţia identic nulă îi este, aşadar, soluţie singulară ecuaţiei din problema finală.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.10. Rezolvaţi problema

$$\begin{cases} x' = x - x^2, \\ x(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 4.10. Observăm că ecuaţia satisface *chestiunea unicităţii* şi admite soluţiile *constante*

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 1.$$

Astfel, cum *graficul* soluţiei căutate nu o poate intersecta pe niciuna din dreptele orizontale care le sunt grafice acestor soluţii constante, deducem că

$$0 < x(t) < 1 \quad \text{pentru orice } t.$$

Introducem funcţiile de la Exerciţiul 4.4, $G : (0,1) \to \mathbb{R}$ şi $A : (-1,1) \to \mathbb{R}$, unde

$$G(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad A(t) = \int_0^t ds = t.$$

Ajungem la

$$x = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}},$$

formulă valabilă pentru orice $t \in \mathbb{R}$. În plus, cele două drepte menţionate anterior îi sunt *asimptote orizontale,* la $-\infty$, respectiv la $+\infty$, graficului acestei soluţii.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Capitolul 5
Ecuaţii exprimate cu diferenţiale, de ordinul întâi

În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, lucrăm raportat la reperul cartezian Oxy şi folosim topologia uzuală, cea bazată pe interioare de discuri (bile B^2).

Exerciţiul 5.1. *([16, pag. 445])* Fie numerele reale $\varepsilon > 0$ şi x_0 fixate. Să considerăm funcţia *netedă* $f : I_{x_0,\varepsilon} \to \mathbb{R}$ — adică, fiind cel puţin *de clasă* C^3: cu (funcţia-)derivată f''' continuă pe $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ —. Atunci, sunt valabile identităţile:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ + \int_{x_0}^{x} (x-u)\cdot f''(u)du, \quad x \in I_{x_0,\varepsilon}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

şi

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2} \\ + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^2}{2}\cdot f'''(u)du, \quad x \in I_{x_0,\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Soluţia exerciţiului 5.1. Folosim integrarea prin părţi:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} f'''(u)\cdot\frac{(x-u)^2}{2}du &= f''(x)\cdot\frac{(x-x)^2}{2} - f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2} \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} f''(u)\cdot(x-u)du \\ &= -f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2} + \int_{x_0}^{x} f''(u)\cdot(x-u)du, \\ \int_{x_0}^{x} f''(u)\cdot(x-u)du &= -f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(u)du. \end{aligned}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 5.2. În contextul exerciţiului precedent şi al Figurii 5.1, să presupunem că

$$\frac{\varepsilon}{3}\cdot \sup_{v\in I_{x_0,\varepsilon}} \left|f'''(v)\right| < \left|f''(x_0)\right|. \tag{5.3}$$

1) Dacă $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$, atunci punctul A se găseşte *dedesubtul* punctului $M(x,f(x))$ pentru orice $x\neq x_0$.

2) Dacă $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$, atunci punctul B se găseşte *deasupra* punctului $M(x,f(x))$ pentru orice $x\neq x_0$.

3) Dacă înlocuim restricţia (5.3) cu cerinţa ca

$$f''(x)<0 \text{ pe } [x_0-\varepsilon,x_0), \quad f''(x)>0 \text{ pe } (x_0,x_0+\varepsilon],$$

atunci punctul C este *deasupra* lui $M(x,f(x))$ pe $[x_0-\varepsilon,x_0)$ şi *dedesubtul* său pe $(x_0,x_0+\varepsilon]$.

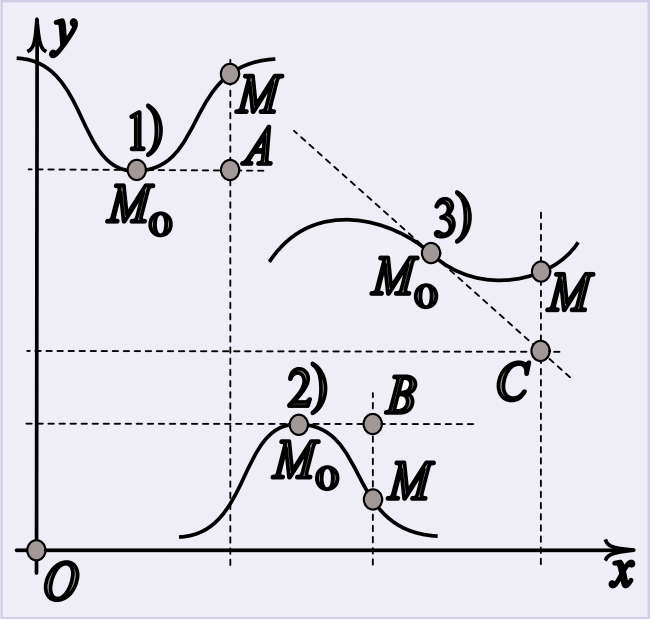


Fig. 5.1 Linia punctată care trece prin M_0 îi este *tangentă* în acest punct curbei figurate cu linie continuă. Punctele A,B,C se găsesc pe respectiva tangentă iar segmentele MA,MB,MC sunt *mereu* verticale.

Soluţia exerciţiului 5.2. La părţile *1)* şi *2)*, tangenta în punctul $M_0\,(x_0,f(x_0))$ la graficul funcţiei f este dreapta orizontală

$$\Delta : y = f(x_0).$$

Astfel, punctele A şi B au coordonatele x şi $f(x_0)$.

Observăm că

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(x-u)^2}{2}\cdot f'''(u)du\right| &\le \left|\int_{x_0}^{x}\frac{(x-u)^2}{2}\cdot\left|f'''(u)\right|du\right| \\ &\le \sup_{v\in I_{x_0,\varepsilon}}\left|f'''(v)\right|\cdot\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(x-u)^2}{2}du\right| \\ &= \sup_{v\in I_{x_0,\varepsilon}}\left|f'''(v)\right|\cdot\frac{|x-x_0|^3}{6} \\ &\le \frac{\varepsilon}{3}\cdot\sup_{v\in I_{x_0,\varepsilon}}\left|f'''(v)\right|\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2}.\end{aligned}$$

Folosind exprimarea *pătratică* a lui f, (5.2), deducem că

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\cdot\left[f''(x_0)+g(x)\right],$$

unde funcţia $g: I_{x_0,\varepsilon}\to\mathbb{R}$ este dată de formula cu acoladă

$$g(x)=\begin{cases}\frac{2}{(x-x_0)^2}\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{(x-u)^2}{2}\cdot f'''(u)du, & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0.\end{cases}$$

Aici,

$$|g(x)|\le\left(1-\delta_{x_0,\varepsilon}\right)\cdot\left|f''(x_0)\right|,$$

unde

$$\delta_{x_0,\varepsilon}\in(0,1),\quad \delta_{x_0,\varepsilon}:=1-\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\sup\limits_{v\in I_{x_0,\varepsilon}}|f'''(v)|}{|f''(x_0)|}.$$

Concluzia se bazează pe faptul că expresia $f''(x_0)+g(x)$ are *semnul* lui $f''(x_0)$ peste tot.

3) Punctul C are coordonatele x şi $y(x)$, unde

$$y(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0),\quad x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon].$$

Din exprimarea *afină* — sau *de ordinul întâi* ori chiar *liniară* — a lui f, (5.1), rezultă că

$$f(x)-y(x)=\begin{cases}\int_{x}^{x_0}(u-x)\cdot f''(u)du<0, & x<x_0,\\ \int_{x_0}^{x}(x-u)\cdot f''(u)du>0, & x>x_0.\end{cases}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 5.3. Se dau numerele reale $a, b, m > 0$ (fixate). Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, cu $I := \left(-\frac{1}{b\pi}, \frac{1}{b\pi}\right)$, prezentată de expresiile din acoladă

$$f(x) = \begin{cases} mx \cdot \left[1 + ax^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

În Figura 5.2, considerăm punctele $M(x, f(x))$ — de pe graficul funcţiei f, G_f — şi $N(x, y(x))$, care se găseşte mereu pe tangenta în origine la curba G_f. Dovediţi că nu există niciun interval $(-c, c) \subset I$, cu $c > 0$, pe care *diferenţa* $f(x) - y(x)$ a ordonatelor celor două puncte să aibă *semn constant nenul*.

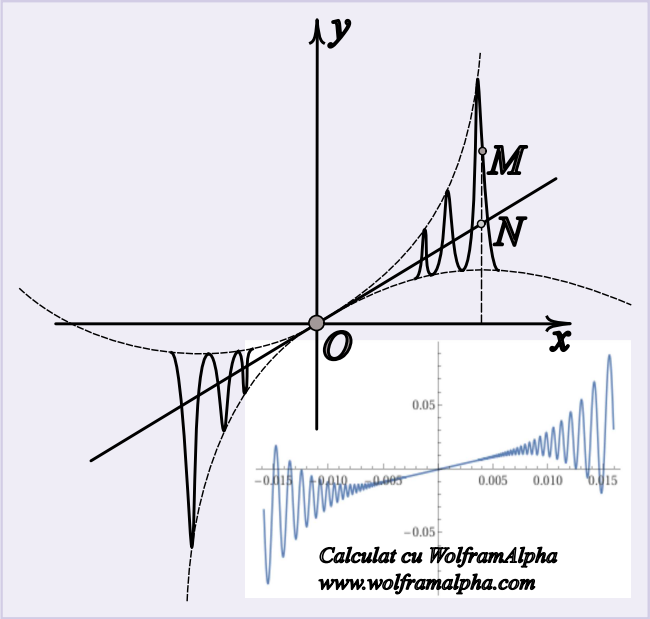


Fig. 5.2 În imagine este ilustrat graficul funcţiei f pentru $m := 2$, $a := 5 \times 10^5$, $b := 20$.

Soluţia exerciţiului 5.3. Stabilim că

$$y(x) = m \cdot x, \quad f(x) - y(x) = ma \cdot x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pentru orice } x \neq 0.$$

Introducem şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale *via* expresia

$$x_n = \frac{2}{n \cdot \pi}, \quad n \geq 1.$$

Aici, $x_n \in I$ dacă $n \geq [2 \cdot b] + 1$.

Observăm că — unde $k \in \mathbb{N}, k \geq \left[\frac{b}{2}\right] + 1$ —

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \begin{cases} 1, & n = 4k+1, \\ -1, & n = 4k+3, \end{cases}$$

deci

$$f(x_n) - y(x_n) = \begin{cases} > 0, & n = 4k+1, \\ < 0, & n = 4k+3. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 5.4. Fie numerele reale $t_0 > \varepsilon > 0$ şi x_0 fixate. Folosind Exerciţiul 5.1, rezolvaţi problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t}, & t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 5.4. Ca de obicei, soluţia *prezumtivă* x este de clasă C^1 în jurul lui t_0. Forma membrului drept al ecuaţiei ne conduce la x fiind cel puţin *de clasă* C^3 pe intervalul $I_{t_0,\varepsilon}$. În plus,

$$x''(t) = \left[\frac{x(t)}{t}\right]' = \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = 0 \quad \text{pentru orice } t.$$

Mai departe, *via* (5.1),

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x(t_0)}{t_0} \cdot (t - t_0) = \frac{x_0}{t_0} \cdot t, \quad t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon].$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Din exerciţiile anterioare ne putem face o părere vizavi de *precizia* cu care funcţionează primele trei *aproximări* ale valorilor lui f:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + o(1) \\ &\sim f(x_0), \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o\left(|x - x_0|\right) \\ &\sim f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2} + o\left((x - x_0)^2\right) \\ &\sim f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

Aici, $o(1)$ desemnează cantităţi (nenumite, neformalizate) care *tind la zero*[1] atunci când x este "foarte aproape de" — sau "în jurul lui" — x_0, respectiv

[1] În cărţile clasice de analiză matematică asemenea mărimi se numesc *infiniţi mici* [13, pag. 76].

$$o\left(g(x)\right) = g(x)\cdot o(1), \quad g(x) \in \left\{|x-x_0|, (x-x_0)^2\right\}.$$

Ne interesează *partea* (cu adevărat) *liniară* a exprimării afine a lui f, adică aplicaţia

$$x - x_0 \longmapsto f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

pe care o putem evidenţia prin corespondenţa — $x = x_0 + h$ —

$$\mathbb{R} \ni h \longmapsto f'(x_0)\cdot h \in \mathbb{R}.$$

Ea este componenta *variabilă* a exprimării afine, adică "responsabilă" de *modificarea* valorilor lui f în jurul mărimii *constante* $f(x_0)$. Din acest motiv, ea se numeşte *diferenţiala — mica* diferenţă a — lui f *în punctul* x_0 [13, pp. 302, 311]:

$$df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad df(x_0)(h) = f'(x_0)\cdot h \quad \text{pentru orice } h.$$

Din punct de vedere geometric, reamintindu-ne Figura 5.2, variaţia lui f este ilustrată prin deplasarea lui $M(h, f(h))$ pe curba G_f iar micile variaţii ale lui f în jurul originii O prin mişcarea lui $N(h, df(0)(h))$ pe tangenta în O la G_f [13, pag. 207].

Intervenţia ecuaţiilor diferenţiale. În contextul Exerciţiilor 5.1, 5.2, să presupunem că funcţia f îi este soluţie particulară ecuaţiei diferenţiale

$$y' = g(x,y), \tag{5.4}$$

unde funcţia $g : \Psi \to \mathbb{R}$ este *netedă* (în raport cu ansamblul variabilelor ei) iar mulţimea Ψ include un disc *deschis,* centrat în punctul $(x_0, f(x_0))$.

Putem scrie că

$$df(x_0)(h) = g(x_0, f(x_0))\cdot h = g(x_0, f(x_0))\cdot d\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x_0)(h), \quad h \in \mathbb{R},$$

unde $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ este funcţia *identitate* — dată de corespondenţa $\mathbb{R} \ni u \longmapsto u$ — [13, pag. 301]. Această exprimare ne permite să *prescurtăm* formulele, adică să renunţăm la h:

$$df(x_0) = g(x_0, f(x_0))\cdot d\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x_0).$$

Pentru a continua prescurtarea, adică a renunţa (şi) la argumentul lui f, revenim la formalismul ecuaţiei diferenţiale (5.4): y în loc de f şi x în loc de $x_0 + h$. De aceea, optăm pentru înlocuirea expresiei matematice $d\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ cu dx [16, pag. 353], aceasta din urmă evidenţiind referirea la variabila independentă $x_0 + h$. Ajungem la

$$dy(x) = g(x, y(x))d\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad dy = g(x,y)dx. \tag{5.5}$$

Presupunând că

$$g(x_0, y_0) \neq 0, \quad y_0 := f(x_0),$$

şi (eventual) micşorând mulţimea Ψ, putem considera că funcţia *g are semn constant nenul pe* Ψ. Ceea ce ne îngăduie să răsturnăm[2] ecuaţia (5.4):

$$x' = \frac{1}{g(x,y)} \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \frac{1}{g(x,y)} \cdot dy = \frac{dy}{g(x,y)}.$$

În practică, funcţia g admite diverse factorizări, vezi (4.3). Astfel, în contextul Exerciţiului 4.4, exprimarea *cu diferenţiale* a ecuaţiei cu variabile separabile se realizează prin

$$a(t)dt - \frac{dx}{g(x)} = 0. \tag{5.6}$$

Această prezentare a ecuaţiei ne permite, adaptând notaţiile din (A.1) la mulţimi de funcţii, o exprimare sugestivă a integralei sale generale:

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int a(t)dt + C, \quad C \in K \subseteq \mathbb{R},$$

unde[3], fiind date intervalul nevid $I \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia continuă $p : I \to \mathbb{R}$,

$$\int p(u)du := \left\{ P : I \to \mathbb{R} \,|\, P' = p \text{ peste tot în } I \right\}.$$

Fie mulţimea $\Psi \subseteq \mathbb{R}^2$ (cel puţin) deschisă, nevidă. Formula matematică

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{5.7}$$

în care funcţiile $M, N : \Psi \to \mathbb{R}$ sunt măcar continue (în raport cu ansamblul variabilelor lor), desemnează o ecuaţie diferenţială *exprimată cu diferenţiale,* de *ordinul întâi*. Prin *soluţie* a sa înţelegem orice funcţie $u : I \to J$, de clasă C^1, care satisface *una* din identităţile

$$M(x,u(x)) + N(x,u(x)) \cdot u'(x) = 0 \quad \text{pentru orice } x \in I, \tag{5.8}$$

respectiv

$$M(u(y),y) \cdot u'(y) + N(u(y),y) = 0 \quad \text{pentru orice } y \in I. \tag{5.9}$$

Aici, I, J sunt intervale (de obicei, deschise) de numere reale.

Aşa cum am văzut, ecuaţia (5.7) constituie scrierea prescurtată a unei ecuaţii exprimate cu derivate ordinare: fie *ecuaţia în* (variabila dependentă) *y,* (5.8), fie *ecuaţia în x,* (5.9). Permiţându-ne să alegem între

---

[2] Lucrând "pe scurt" — aici, *scurtătura* este un calcul *nepermis* cu concluzia *adevărată* —, admitem că $\frac{dx}{dy}$ este (o) *fracţie* şi nu (o) *notaţie* [13, pag. 144].

[3] A se vedea [16, pag. 414], [14, pag. 18].

$$M(x,y)+N(x,y)\cdot y'=0,\quad y=y(x),$$

şi

$$M(x,y)\cdot x'+N(x,y)=0,\quad x=x(y),$$

exprimarea (5.7) este socotită *simetrică* [23, pag. 31] în privinţa *rolurilor* jucate de variabilele x şi y.

Funcţii implicite. Întrebuinţăm Figura 5.3. Fie $\Psi\subseteq\mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi $M_0(x_0,y_0)$ un punct al ei. Introducem cutia $K\subsetneq\Psi$ de centru M_0 şi de dimensiuni $(2a)\times(2b)$.

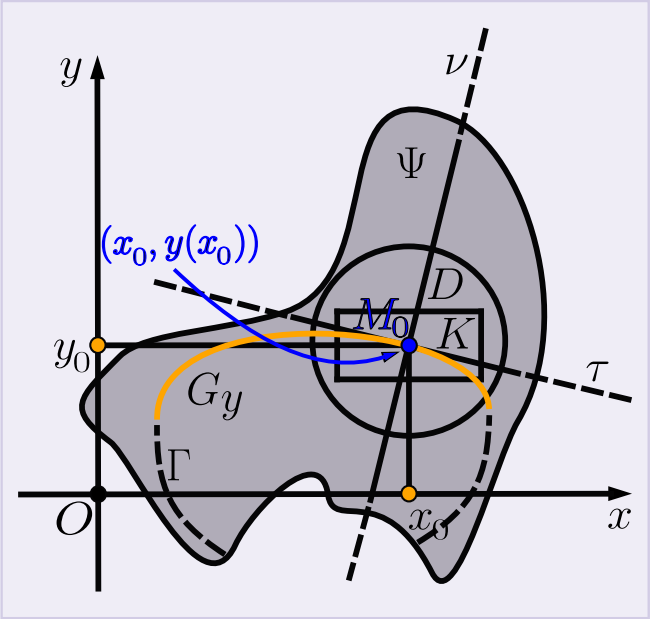


Fig. 5.3 Graficul figurat în portocaliu, G_y, îi aparţine *prelungirii* funcţiei y pe intervalul *maximal* de existenţă ca soluţie a unei probleme Cauchy. K este *cutia* de centru (x_0,y_0) şi de dimensiuni $(2a)\times(2b)$ în interiorul căreia y are existenţa garantată. D este discul (bila B^2) centrat în M_0 unde funcţia $\frac{\partial U}{\partial y}$ nu se anulează nicăieri. Dreptele τ şi ν desemnează *tangenta,* respectiv *normala* la graficul G_y, trasate prin M_0. Γ reprezintă curba de ecuaţie $U(x,y)=0$ care include graficul G_y.

Fie $U:\Psi\to\mathbb{R}$ o funcţie *netedă* — admiţând derivate parţiale de *pâna la* ordinul *al treilea, continue* în raport cu ansamblul variabilelor lor; ca urmare, U este *continuă* în raport cu ansamblul variabilelor ei [16, pag. 583] —. În particular, are loc egalitatea (Schwarz) [16, pag. 597]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}(x,y)\quad\text{pentru orice }(x,y)\in\Psi. \tag{5.10}$$

Admitem că

$$U(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

Căutăm o funcţie $y:[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\to[y_0-b,y_0+b]$, de clasă C^1, care *(1)* să verifice identitatea

$$U(x,y(x))=0,\quad x\in I_{x_0,\alpha}, \tag{5.11}$$

(2) al cărei *grafic*, G_y, să treacă prin punctul M_0, adică

$$y(x_0)=y_0,$$

şi *(3)* care să fie *unica* funcţie cu aceste proprietăţi. Aici, $0<\alpha\leq a$. O atare funcţie se numeşte *soluţie în y* [16, pag. 642] a *ecuaţiei (5.11)*, ecuaţie scrisă *prescurtat* drept

$$U(x,y)=0. \tag{5.12}$$

În mod asemănător, se definesc *soluţiile în x*, unde $x=x(y)$, ale lui (5.12).

Teorema funcţiilor implicite[4] — aşa se (mai) numesc funcţiile prezentate ca soluţii ale ecuaţiei (5.12) [16, pag. 643] — afirmă că *soluţia* (unică) *în y există în jurul lui* x_0 dacă funcţia $\frac{\partial U}{\partial y}$ are *semn constant nenul* peste tot în interiorul unui disc $D\subseteq\Psi$ centrat în M_0 (o bilă B^2) pentru care

$$K\subsetneq D.$$

Vezi [16, pp. 645-646].

În plus, *via* aceeaşi teoremă, funcţia y este (singura) soluţie a problemei Cauchy

$$\begin{cases} u'=g(x,u),\ g:K\to\mathbb{R}, \\ u(x_0)=y_0, \end{cases}\qquad g(x,u)=-\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(x,u)}{\frac{\partial U}{\partial y}(x,u)}. \tag{5.13}$$

Ecuaţia diferenţială din (5.13) se reorganizează ca

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,u(x))+\frac{\partial U}{\partial y}(x,u(x))\cdot u'(x)=0,\quad x\in I_{x_0,a},$$

respectiv ca

$$M(x,u)dx+N(x,u)du=0,\quad (x,u)\in D,$$

unde

[4] Un caz particular al său, cel în care $U(x,y)=x-p(y)$ pe Ψ, este demonstrat în Anexa A.

$$\begin{cases} M(x,u) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,u), \\ N(x,u) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,u). \end{cases} \tag{5.14}$$

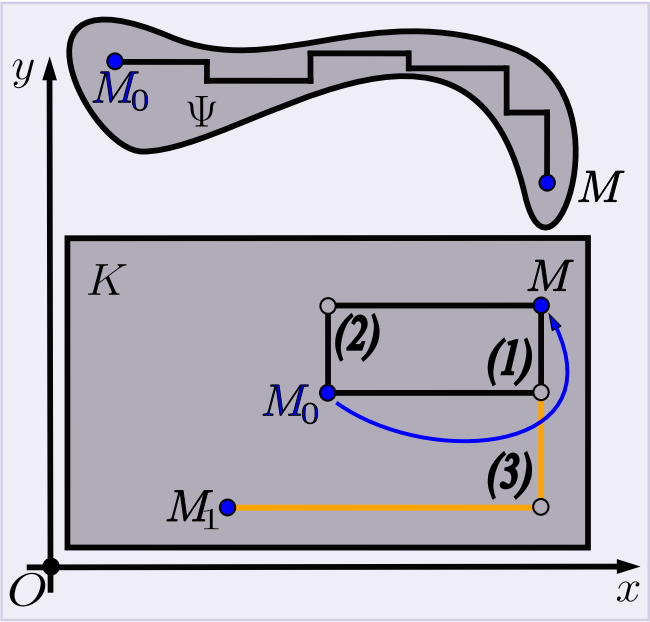


Fig. 5.4 În cutia K sunt figurate trei *linii poligonale,* de câte două segmente fiecare, având segmentele componente paralele cu axele reperului Oxy: drumurile *(1)* şi *(2)* "leagă" între ele punctele $M_0(x_0,y_0)$ şi $M(x,y)$ iar drumul *(3)* punctele $M_1(x_1,y_1)$ şi M. Deasupra lor se află ilustraţia unei mulţimi deschise Ψ care este *poligonal conexă* [17, pag. 232]: adică, putem "călători" între orice două puncte ale unei asemenea mulţimi urmând (cel puţin) o linie poligonală cu număr *finit* de segmente componente, situată *în mulţime* şi având fiecare din segmente *paralel* cu (câte una din) axele de coordonate. Pe astfel de mulţimi se introduc versiuni ale formulei (5.17) [17, pag. 188].

Găsirea lui U. Să revenim la ecuaţia exprimată cu diferenţiale (5.7), unde funcţiile M şi N vor fi presupuse *netede*. Fixăm punctul $(x_0,y_0) \in \Psi$ — data impusă — şi introducem cutia K, respectiv discul D, cu $K \subsetneq D \subseteq \Psi$, la fel ca în discuţia realizată în contextul Figurii 5.3. Astfel, cerem ca

$$N(x,y) \neq 0 \tag{5.15}$$

şi ca

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \tag{5.16}$$

pentru orice $(x,y) \in D$. Evident, prima condiţie îi corespunde lui $\frac{\partial U}{\partial y}$ fiind peste tot de semn constant nenul iar cea de-a doua egalităţii lui Schwarz (5.10), deoarece ne interesează *reconstrucţia* funcţiilor M şi N în forma oferită de (5.14).

Fie $(x,y) \in K$ oarecare. Utilizăm Figura 5.4. Segmentul de capete (x_0,y_0) şi (x,y_0), aşezat *orizontal,* şi segmentul de capete (x,y_0) şi (x,y), aşezat *vertical,* alcătuiesc (prin reuniunea punctelor lor) o *linie poligonală* $\mathscr{L}(x,y)$ inclusă în cutia K. Introducem *integrala curbilinie*

$$U(x,y) := \int_{\mathscr{L}(x,y)} M(u,v)du + N(u,v)dv. \tag{5.17}$$

Valoarea sa [17, pag. 181] este dată de suma integralelor "obişnuite" care le corespund segmentelor componente ale liniei, adică

$$\int_{x_0}^{x} M(u,y_0)du + \int_{y_0}^{y} N(x,v)dv.$$

Exerciţiul 5.5. Fie funcţia netedă $p : D \to \mathbb{R}$, cu $p = p(x,y)$, şi funcţiile $q, r : I_{x_0,a} \to I_{y_0,b}$ de clasă C^1. Atunci, pentru orice $(x,y) \in K$, sunt valabile estimările:

$$P(x) := \int_{x_0}^{x} p(s,q(x))ds \quad \Longrightarrow \quad P'(x) = p(x,q(x)) + q'(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{\partial p}{\partial y}(s,q(x))ds,$$

$$Q(x,y) := \int_{x_0}^{x} p(s,y)ds \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial p}{\partial y}(s,y)ds,$$

$$R(x) := \int_{y_0}^{r(x)} p(x,s)ds \quad \Longrightarrow \quad R'(x) = p(x,r(x)) \cdot r'(x) + \int_{y_0}^{r(x)} \frac{\partial p}{\partial x}(x,s)ds.$$

Soluţia exerciţiului 5.5. Funcţia p, restrânsă la compactul K, este uniform continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale. La rândul lor, funcţiile q, q', r, r' sunt uniform continue. Astfel, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ cu următoarele proprietăţi:

$$|p(x_1,y_1) - p(x_2,y_2)| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial p}{\partial x}(x_1,y_1) - \frac{\partial p}{\partial x}(x_2,y_2) \right| < \varepsilon$$

oricare ar fi punctele $(x_i,y_i) \in K$, cu $i = 1, 2$, limitate la

$$\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_\infty < \delta.$$

Remarcăm că acest δ este *independent de* (x_i,y_i). În plus, există $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, şi el independent de x_i, astfel încât

$$|x_1 - x_2| < \eta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |r(x_1) - r(x_2)| & < \delta(\varepsilon), \\ |r'(x_1) - r'(x_2)| & < \varepsilon. \end{cases}$$

Fie $h \neq 0$ suficient de *mic* pentru ca $x + h \in I_{x_0,a}$. Dacă $x = x_0 - a$, atunci h trebuie luat (doar) pozitiv. Au loc relaţiile:

$$\begin{aligned}
\frac{R(x+h)-R(x)}{h} &= \int_{y_0}^{r(x)} \frac{p(x+h,s)-p(x,s)}{h} ds + \frac{1}{h}\cdot \int_{r(x)}^{r(x+h)} p(x+h,s) ds,\\
\frac{p(x+h,s)-p(x,s)}{h} &= \frac{\partial p}{\partial x}(\xi,s),\\
\xi &= \xi(x,h,s) \in [\min\{x,x+h\}, \max\{x,x+h\}],\\
\int_{r(x)}^{r(x+h)} p(x+h,s) ds &= p(x+h,\zeta)\cdot [r(x+h)-r(x)],\\
\zeta &= \zeta(x,h) \in [\min\{r(x),r(x+h)\}, \max\{r(x),r(x+h)\}],\\
\frac{r(x+h)-r(x)}{h} &= r'(\omega),\\
\omega &= \omega(x,h) \in [\min\{x,x+h\}, \max\{x,x+h\}].
\end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Îl restrângem pe h la $|h| < \min\{\delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon)\}$. Atunci,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial p}{\partial x}(\xi,s) - \frac{\partial p}{\partial x}(x,s)\right| &< \varepsilon,\\
|\zeta - r(x)| \le |r(x)-r(x+h)| &< \delta(\varepsilon),\\
|p(x+h,\zeta) - p(x,r(x))| &< \varepsilon,\\
\left|r'(\omega) - r'(x)\right| &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

De aici,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{y_0}^{r(x)} \frac{p(x+h,s)-p(x,s)}{h} ds - \int_{y_0}^{r(x)} \frac{\partial p}{\partial x}(x,s) ds\right|\\
&\le \left|\int_{y_0}^{r(x)} \left|\frac{p(x+h,s)-p(x,s)}{h} - \frac{\partial p}{\partial x}(x,s)\right| ds\right| \le \varepsilon \left|\int_{y_0}^{r(x)} ds\right|\\
&\le \varepsilon \cdot b,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\cdot \int_{r(x)}^{r(x+h)} p(x+h,s) ds - p(x,r(x))\cdot r'(x)\right|\\
&\le \left|\frac{1}{h}\cdot \int_{r(x)}^{r(x+h)} p(x+h,s) ds - p(x,r(x))\cdot \frac{r(x+h)-r(x)}{h}\right|\\
&\quad + \left|p(x,r(x))\cdot \left[-r'(x) + \frac{r(x+h)-r(x)}{h}\right]\right|\\
&= |p(x+h,\zeta) - p(x,r(x))| \cdot \left|\frac{r(x+h)-r(x)}{h}\right|\\
&\quad + |p(x,r(x))| \cdot \left|\frac{r(x+h)-r(x)}{h} - r'(x)\right|\\
&\le \varepsilon \cdot \left|r'(\omega)\right| + \sup_{(u,v)\in K} |p(u,v)| \cdot \left|r'(\omega) - r'(x)\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \cdot \left[\sup_{w \in I_{x_0,a}} \left| r'(w) \right| + \sup_{(u,v) \in K} |p(u,v)| \right].$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 5.6. Fie $y : I_{x_0,\alpha} \to I_{y_0,b}$ o soluţie a ecuaţiei în y (5.8) verificând data impusă: $y(x_0) = y_0$. Atunci,

$$U(x, y(x)) = 0 \quad \text{pentru orice } x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$

Adică, expresia matematică a lui U constituie formula (din membrul stâng al) unei *integrale particulare* $m(x,y) = 0$ a ecuaţiei diferenţiale (5.8).

Soluţia exerciţiului 5.6. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[U(x,y(x))\right] &= \frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} M(u,y_0)dv + \int_{y_0}^{y(x)} N(x,v)dv\right] \\ &= M(x,y_0) + \frac{d}{dx}\left[\int_{y_0}^{y(x)} N(x,v)dv\right] \\ \text{(Exerciţiul 5.5, } R'(x)) \quad &= M(x,y_0) + \left[\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\partial N}{\partial x}(x,v)dv + N(x,y(x)) \cdot y'(x)\right], \end{aligned}$$

respectiv — pe baza lui (5.16) —

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\partial N}{\partial x}(x,v)dv = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\partial M}{\partial v}(x,v)dv = M(x,y(x)) - M(x,y_0).$$

În fine,

$$\frac{d}{dx}\left[U(x,y(x))\right] = M(x,y(x)) + N(x,y(x)) \cdot y'(x) = 0, \quad x \in I_{x_0,\alpha},$$

deci aplicaţia $I_{x_0,\alpha} \ni x \longmapsto U(x,y(x))$ este *constantă*:

$$U(x,y(x)) = U(x_0,y(x_0)) = U(x_0,y_0) = 0.$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 5.7. *(Liniile poligonale "întâi-orizontal-apoi-vertical")* În contextul Figurii 5.4, avem funcţiile $U_{(i)} : K \to \mathbb{R}$, cu $i = 1, 3$, prezentate prin

$$\begin{cases} U_{(1)}(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(u,y_0)du + \int_{y_0}^{y} N(x,v)dv, \\ U_{(3)}(x,y) = \int_{x_1}^{x} M(u,y_1)du + \int_{y_1}^{y} N(x,v)dv \end{cases} \quad \text{pentru orice } x, y.$$

Atunci, există numărul $C_\star \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$U_{(1)}(x,y) = U_{(3)}(x,y) + C_\star, \quad (x,y) \in K.$$

Soluţia exerciţiului 5.7. Observăm că

$$U_{(1)}(x,y) - U_{(3)}(x,y) = \varphi(x),$$
$$\varphi(x) := \int_{x_1}^{x} [M(u,y_0) - M(u,y_1)]\,du + \int_{y_0}^{y_1} N(x,v)dv + \int_{x_0}^{x_1} M(u,y_0)du.$$

La fel ca în demonstraţia exerciţiului precedent,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= M(x,y_0) - M(x,y_1) + \frac{d}{dx}\left[\int_{y_0}^{y_1} N(x,v)dv\right] \\
&= M(x,y_0) - M(x,y_1) + \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial N}{\partial x}(x,v)dv \ \left(\text{Exerciţiul 5.5, adaptarea lui } \tfrac{\partial Q}{\partial y}\right) \\
&= M(x,y_0) - M(x,y_1) + \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial M}{\partial v}(x,v)dv \\
&= 0, \quad x \in I_{x_0,a}.
\end{aligned}$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiile 5.5–5.7 se reconfigurează uşor pentru a justifica afirmaţii privitoare la *liniile poligonale "întâi-vertical-apoi-orizontal"*. Astfel,

$$U(x,y) = \int_{\mathscr{L}_{OV}(x,y)} M(u,v)du + N(u,v)dv = \int_{\mathscr{L}_{VO}(x,y)} M(u,v)du + N(u,v)dv,$$

unde

$$\int_{\mathscr{L}_{OV}(x,y)} M(u,v)du + N(u,v)dv := \int_{x_0}^{x} M(u,y_0)du + \int_{y_0}^{y} N(x,v)dv,$$
$$\int_{\mathscr{L}_{VO}(x,y)} M(u,v)du + N(u,v)dv := \int_{y_0}^{y} N(x_0,v)dv + \int_{x_0}^{x} M(u,y)du.$$

Exerciţiul 5.8. *(Celule dreptunghiulare)* În contextul Figurii 5.4,

$$\int_{x_0}^{x} M(u,y_0)du + \int_{y_0}^{y} N(x,v)dv + \int_{x}^{x_0} M(u,y)du + \int_{y}^{y_0} N(x_0,v)dv = 0$$

pentru orice $(x,y) \in K$. În particular, presupunând că *ne deplasăm* pe frontiera cutiei K *în sensul* dat de ordinea — trecerii prin vârfurile dreptunghiului — $(x_0,y_0) \to (x,y_0) \to (x,y) \to (x_0,y) \to (x_0,y_0)$, avem [17, pag. 223]

$$\int_{\mathrm{Fr}(K)} M(u,v)du + N(u,v)dv = 0.$$

Soluţia exerciţiului 5.8. Introducem funcţia $\varphi : D \to \mathbb{R}$, unde $\varphi = \varphi(x,y)$, a cărei formulă este suma celor patru integrale din membrul stâng al egalităţii. Observăm că

$$\varphi(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=0,\quad (x,y)\in K.$$

Pe baza teoremei de medie (Lagrange) [13, pag. 426] [16, pag. 630], există punctul (ξ,η) din segmentul de capete (x_0,y_0) şi (x,y) cu proprietatea că

$$\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi,\eta)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi,\eta)\cdot(y-y_0)=0.$$

Aşadar, funcţia φ este *constantă*.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Aproximările de ordinul întâi şi de ordinul al doilea ale unei funcţii netede. Diferenţiala funcţiei. Lucrăm în discul D: fie funcţia $p:\Psi\to\mathbb{R}$, *continuă* în raport cu ansamblul variabilelor sale şi *netedă* pe D.

Sunt valabile primele trei *aproximări* [16, pag. 632] ale valorilor lui p *în jurul punctului* (x_0,y_0):

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= p(x_0,y_0)+o(1)\\
(\text{ordinul }0) &\sim p(x_0,y_0)\\
&= p(x_0,y_0)+p'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+p'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\\
&\quad +o\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty\right)\\
(\text{ordinul }1) &\sim p(x_0,y_0)+\frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial p}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\\
&= p(x_0,y_0)+p'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+p'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\\
&\quad +\frac{1}{2}\cdot p''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\cdot p''_{y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\\
&\quad +p''_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)\\
&\quad +o\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty^2\right)\\
(\text{ordinul }2) &\sim p(x_0,y_0)+p'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+p'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\\
&\quad +\frac{1}{2}\cdot p''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\cdot p''_{y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\\
&\quad +p''_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0).
\end{aligned}$$

Din aproximarea de ordinul întâi extragem formula — [16, pag. 594] — *diferenţialei* în punctul (x_0,y_0), $dp(x_0,y_0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, a funcţiei p:

$$\begin{aligned}
dp(x_0,y_0)(h_1,h_2) &= \frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h_1+\frac{\partial p}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot h_2\\
&= \frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot \mathrm{pr}_x(x_0,y_0)(h_1,h_2)+\frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot \mathrm{pr}_y(x_0,y_0)(h_1,h_2)\\
&= \frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot dx(x_0,y_0)(h_1,h_2)+\frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot dy(x_0,y_0)(h_1,h_2),
\end{aligned}$$

unde $\mathrm{pr}_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\mathrm{pr}_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ desemnează *proiecţiile* punctelor din planul euclidian pe axele reperului Oxy:

$$\mathrm{pr}_x : (x,y) \longmapsto x, \quad \mathrm{pr}_y : (x,y) \longmapsto y.$$

Le notăm cu dx, respectiv cu dy.

În mod *prescurtat*, avem la dispoziţie expresia matematică

$$dp(x,y) = \frac{\partial p}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)dy, \quad (x,y) \in K.$$

Astfel, în contextul lui (5.17),

$$dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Aproximările de ordinul al doilea (pătratice) ale valorilor unei funcţii numerice, de una ori de două variabile (independente), se folosesc la construcţia *cercurilor de curbură*, respectiv a *sferelor de curbură* care le sunt tangente graficelor respectivelor funcţii. În Figura 5.3, ecuaţiile dreptelor τ şi ν sunt

$$\tau : y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad \nu : x - x_0 = -y'(x_0) \cdot [y - y(x_0)].$$

Centrul cercului de curbură la graficul G_y în punctul $(x_0, y(x_0))$ se află pe dreapta ν.

Exerciţiul 5.9. *1)* Rezolvaţi ecuaţia exprimată cu diferenţiale

$$(x+y)dx + xdy = 0.$$

2) Verificaţi dacă ecuaţia diferenţială[5] în x,

$$x' = -\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}, \quad y > 0,$$

admite soluţiile

$$x = -y + \sqrt{y^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3) Stabiliţi dacă ecuaţia diferenţială în y, interpretată ca ecuaţie liniară şi neomogenă,

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot y - 1, \quad x \neq 0,$$

posedă soluţiile

$$y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

[5] O asemenea ecuaţie se găseşte în clasa *ecuaţiilor omogene* (de ordin zero, [21, pag. 30]).

Soluţia exerciţiului 5.9. *1)* Fixăm punctul $M(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ şi introducem cutia K de centru M şi de dimensiuni 2×2. Aici, $\Psi:=\mathbb{R}^2$, $D:=B^2(M,2)$. Este verificată condiţia (5.16):

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y)=\frac{\partial}{\partial x}(x)=1\quad\text{pentru orice } x,\,y.$$

Avem

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}(u+y_0)du+\int_{y_0}^{y}xdv=\frac{x^2}{2}+xy-\left(\frac{x_0^2}{2}+x_0y_0\right).$$

2) Stabilim punctul M astfel încât $y_0>0$ şi $x_0+y_0>0$. Ultima cerinţă, împreună cu restrângerea razei discului D la mărimi mai mici decât $\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}$ şi a dimensiunilor cutiei K la $(2a)\times(2a)$ pentru $a<x_0+y_0$, implică — atenţie, aici $M(x,y)$ desemnează coeficientul lui dx din (5.7)! —

$$M(x,y)>0,\quad (x,y)\in D,$$

ceea ce ne permite *construcţia* ecuaţiei în x.

Remarcăm şi existenţa soluţiei *identic nule* ca soluţie particulară: îi corespunde lui $C=0$. Cazul $x=0$ nu poate fi tratat la punctul *3)* datorită restricţiei (5.15), necesară la construcţia ecuaţiei în y.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 5.10. *1) ([19, pag. 64])* Integraţi ecuaţia exprimată cu diferenţiale

$$(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$$

în jurul datei impuse $x_0=y_0=1$.

2) Cercetaţi dacă problema cu date pe frontieră

$$\begin{cases} y'=\frac{y-2x-1}{2y-x-1}, & x<1,\\ y(1)=1 \end{cases}$$

dispune de soluţia

$$y=\frac{1}{2}\cdot\left[1+x+\sqrt{(1-x)(3x+5)}\right],\quad x\in\left[-\frac{5}{3},1\right].$$

Soluţia exerciţiului 5.10. *1)* Fixăm punctul $M_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ şi introducem cutia K de centru M_0 şi de dimensiuni 2×2. Aici, $\Psi:=\mathbb{R}^2$, $D:=B^2(M_0,2)$. Este verificată condiţia (5.16).

Avem

$$\begin{aligned} U(x,y)&=x^2+y^2-xy+x-y-\left(x_0^2+y_0^2-x_0y_0+x_0-y_0\right)\\ &=x^2+y^2-xy+x-y-1,\quad (x,y)\in\Psi. \end{aligned}$$

Conform [15, Anexa B], curba de ecuaţie $U(x,y)=0$ este o *elipsă*, Γ, de *centru* $V\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, cu *axa mare* dată de ecuaţia

$$\Delta : y = x + \frac{2}{3}.$$

Vezi Figura 5.5.

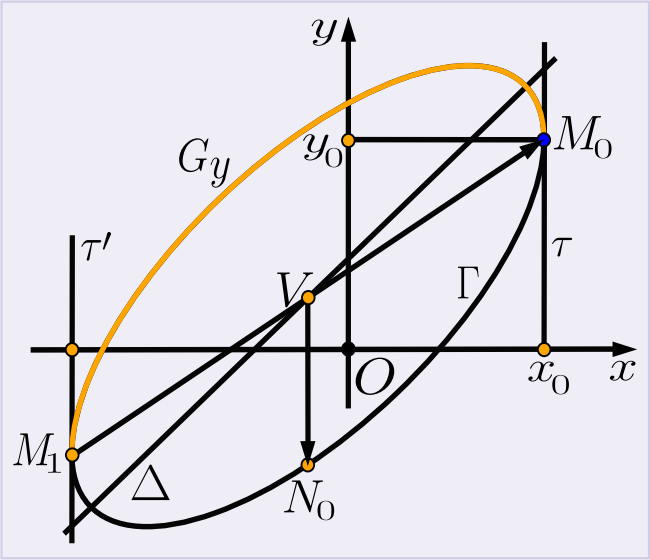


Fig. 5.5 Avem punctele $M_0(1,1)$, $M_1\left(-\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $N_0\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ şi $V\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Curba Γ este *elipsa* de *centru* V având dreapta Δ, de ecuaţie $y=x+\frac{2}{3}$, ca axă (longitudinală) de simetrie. Elipsa este determinată de perechea de *raze conjugate* $\overrightarrow{VM_0}$ şi $\overrightarrow{VN_0}$. Dreapta τ, de ecuaţie $x=1$, îi este *tangentă* elipsei în M_0 iar dreapta τ', de ecuaţie $x=-\frac{5}{3}$, în M_1. Arcul de elipsă G_y, colorat în portocaliu, este graficul soluţiei de la punctul *2)*.

Reorganizăm ecuaţia elipsei ca

$$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+1\right)^2-\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot y+x-2=0,$$

ceea ce ne permite introducerea noilor coordonate X şi Y:

$$\begin{cases} X = x-\frac{y}{2}, \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

Pentru punctul M_0: $X_0=\frac{1}{2}$, $Y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Am ajuns la ecuaţia unui *cerc*, $\mathscr{C}$, în reperul OXY:

$$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Centrul său V are coordonatele: $X_V=-\frac{1}{2}$, $Y_V=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$, respectiv $x_V=-\frac{1}{3}$, $y_V=\frac{1}{3}$.

Dreapta τ, de ecuaţie $x=1$, capătă, în OXY, ecuaţia

$$Y=-\sqrt{3}(X-1).$$

Remarcăm că *tangenta în* $M_0(X_0,Y_0)$ la cercul $\mathscr{C}$, de ecuaţie

$$(X-X_V)(X-X_0)+(Y-Y_V)(Y-Y_0)=R^2,\quad R:=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

coincide cu τ.

Dreapta τ fiindu-i, aşadar, tangentă în punctul M_0 elipsei Γ, segmentul VM_0 alcătuieşte, împreună cu segmentul VN_0, $N_0\in\Gamma$, — *paralel* cu tangenta τ —, perechea de *raze conjugate* care generează, în mod *unic*, elipsa Γ. Vezi discuţia din [15, Capitolul 3].

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Intervenţia ecuaţiilor cu derivate parţiale, de ordinul întâi. Formula (5.17) a fost introdusă în contextul restricţiei (5.16), însă nu am discutat despre cum se procedează atunci când aceasta din urmă este încălcată. În literatură, se fac referiri la (5.16) cu denumirea de *condiţie de integrabilitate* a *formei* ori a *expresiei diferenţiale* $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ din (5.7) [21, pp. 105, 422].

Să considerăm o funcţie *netedă* $\mu:D\to\mathbb{R}$, unde $\mu=\mu(x,y)$, cu *semn constant nenul* peste tot. Facem observaţia că, înmulţind ambii membri ai ecuaţiei (5.8) cu expresia $\mu(x,u(x))$, respectiv ambii membri ai ecuaţiei (5.9) cu $\mu(u(y),y)$, *nu pierdem* niciuna din prezumtivele soluţii $u:I\to J$ ale ecuaţiilor în discuţie. Din acest motiv, introducem ecuaţia diferenţială

$$[\mu(x,y)\cdot M(x,y)]\,dx+[\mu(x,y)\cdot N(x,y)]\,dy=0,\quad (x,y)\in D. \tag{5.18}$$

Funcţiei μ îi impunem să verifice în mod identic egalitatea

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)M(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)N(x,y)\right],$$

adică să-i fie *soluţie particulară* ecuaţiei diferenţiale exprimate cu *derivate parţiale* de ordinul I

$$A(x,y)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}+B(x,y)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}+C(x,y)\cdot\mu=0,\quad (x,y)\in D, \tag{5.19}$$

unde

$$A:=-N,\quad B:=M,\quad C:=-\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}.$$

În ipoteza că $\mu = \mu(x)$ şi că funcţia N are *semn constant nenul* pe D, ecuaţia (5.19) devine

$$\frac{d\mu}{dx} + \frac{C(x,y)}{A(x,y)} \cdot \mu = 0.$$

Astfel, atunci când *coeficientul lui* μ *depinde doar de x,* găsirea unei funcţii μ se reduce la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale ordinare, liniară şi omogenă:

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{-\zeta(x)}, x \in I_{x_0,a}, \quad \zeta \in \int \eta(x)dx, \quad \eta(x) := \frac{C(x,y)}{A(x,y)}.$$

În mod analog, dacă $\mu = \mu(y)$, dacă funcţia M nu se anulează nicăieri în D şi dacă expresia $\frac{C(x,y)}{B(x,y)}$ depinde numai de y, avem

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{-\zeta(y)}, y \in I_{x_0,b}, \quad \zeta \in \int \eta(y)dy, \quad \eta(y) := \frac{C(x,y)}{B(x,y)}.$$

Exerciţiul 5.11. *1)* În contextul Exerciţiului 1.10, să presupunem că funcţiile p şi q sunt *netede*. Atunci,

$$\mu(t,x) = \mu(t) = \mathrm{e}^{P(t)}, \quad t \in (t_0,t_1).$$

2) În contextul Exerciţiului 4.4, să considerăm că funcţia g este *netedă*. Atunci,

$$\mu(t,x) = \mu(x) = \frac{1}{|g(x)|}, \quad x \in (x_0,x_1).$$

3) Putem renunţa la aceste limitări privitoare la *netezimea* funcţiilor?

Soluţia exerciţiului 5.11. *1)* $\frac{d\mu}{dt} - p(t)\mu = 0$. *2)* $\frac{d\mu}{dx} + \frac{g'(x)}{g(x)}\mu = 0$.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Invarianţa formulei unei diferenţiale, de ordinul întâi. Fie funcţiile $g : I_{x_0,a} \to I_{y_0,b}$ şi $f : I_{y_0,b} \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, unde $g(x_0) = y_0$. Aici, $g = g(x)$ şi $f = f(y)$. În plus, să admitem că

$$I_{y_0,b} = g\left(I_{x_0,a}\right), \quad g'(x) \neq 0 \text{ pentru orice } x,$$

deci că *funcţia g este bijectivă.*

Realizăm estimările — $h \to 0$ —

$$\begin{aligned} f(g(x_0+h)) &= f\left(g(x_0) + g'(x_0)\cdot h + o(|h|)\right) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\cdot\left[g'(x_0)\cdot h + o(|h|)\right] + o\left(\left|g'(x_0)\cdot h + o(|h|)\right|\right) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\cdot h + o(|h|) \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} f\left(g(x_0)+g'(x_0)\cdot h\right) &= f(g(x_0))+f'(g(x_0))\cdot\left[g'(x_0)\cdot h\right]+o\left(\left|g'(x_0)\cdot h\right|\right)\\ &= f(g(x_0))+f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\cdot h+o\left(|h|\right), \end{aligned}$$

din care deducem că

$$\begin{aligned} (f\circ g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x_0)+g'(x_0)\cdot h\right)-f(g(x_0))}{h}\\ &= f'(g(x_0))\cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

Aşadar, la determinarea derivatei unei funcţii *compuse* — o "funcţie de funcţie" [13, pag. 62] —, procedura "nu vede" dincolo de *partea afină* a funcţiei din *interiorul* compunerii. În Figura 5.3 se remarcă următorul detaliu: o *mică* porţiune a tangentei τ este inclusă, alături de graficul funcţiei y, în discul D. Astfel, putem realiza operaţii atât asupra mărimii $U(x,y(x))$ cât şi asupra lui $U(x,y(x)+y'(x)\cdot(x-x_0))$ dacă lucrăm *în jurul* punctului $(x_0,y(x_0))$.

Cum se exploatează o asemenea limitare în calculul cu forme diferenţiale? Dat fiind că $g'(x_0)\neq 0$, aplicaţia

$$\mathbb{R}\ni h\longmapsto g'(x_0)\cdot h\in\mathbb{R}$$

este un *izomorfism* de spaţii liniare reale. Ea produce identificarea $g'(x_0)\cdot\mathbb{R}\equiv\mathbb{R}$, deci — $h_1=g'(x_0)\cdot h$ şi $h_1\to 0$ —

$$\begin{aligned} f(g(x_0)+h_1) &= f\left(g(x_0)+g'(x_0)\cdot h\right)\\ &= f(g(x_0))+f'(g(x_0))\cdot h_1+o\left(|h_1|\right), \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} (df)(g(x_0))(h_1) &= f'(g(x_0))\cdot h_1\\ &= f'(g(x_0))\cdot d\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(g(x_0))(h_1). \end{aligned}$$

Utilizând o notaţie omoloagă — vezi (5.5) — pentru $d\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, scriem *prescurtat* că

$$(df)(g(x))=f'(g(x))dg(x)$$

şi, prin extensie de limbaj, capătă înţeles formula matematică

$$(df)(g)=f'(g)dg. \tag{5.20}$$

Aceasta din urmă îi corespunde *literal* expresiei tipice

$$df(y)=f'(y)dy,\quad y\in I_{y_0,b}.$$

În literatură, relaţia de calcul (5.20) poartă numele de prezentarea *invariantă* [16, pag. 608] [13, pag. 409] a diferenţialei de ordinul I a funcţiei (compuse) f. O putem întrebuinţa în felul următor:

$$\begin{aligned}(df)(g(x)) &= f'(g(x))\cdot dg(x),\\ &\quad dg(x) = g'(x)dx, \quad g = g(x),\\ (df)(g(x,y)) &= f'(g(x,y))\cdot dg(x,y),\\ &\quad dg(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)dy, \quad g = g(x,y),\\ &\quad \text{ş.a.m.d.}\end{aligned}$$

Revenind la ecuaţia (5.19), fie $\varphi : D \to \mathbb{R}$ o funcţie netedă, cu $\varphi = \varphi(x,y)$. Presupunem că

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\cdot A(x,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\cdot B(x,y) \neq 0 \quad \text{pentru orice } (x,y) \in D.$$

Dacă $\mu = \mu(\varphi(x,y))$, atunci (5.19) devine

$$\frac{d\mu}{d\varphi} + \frac{C(x,y)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}A + \frac{\partial \varphi}{\partial y}B\right)(x,y)}\cdot \mu = 0.$$

În ipoteza că expresia $\frac{C(x,y)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}A + \frac{\partial \varphi}{\partial y}B\right)(x,y)}$ depinde doar de φ, avem

$$\mu(\varphi) = \mathrm{e}^{-\zeta(\varphi)},\ \zeta \in \int \eta(\varphi)d\varphi, \quad \eta(\varphi(x,y)) := \frac{C(x,y)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}A + \frac{\partial \varphi}{\partial y}B\right)(x,y)},\ (x,y) \in D.$$

Exerciţiul 5.12. Fie funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, cu proprietatea că

$$h(\alpha) \neq \alpha \quad \text{pentru orice } \alpha.$$

Luăm în considerare ecuaţia diferenţială *omogenă*

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right), \quad t > 0.$$

Atunci, putem opta pentru

$$\mu(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{H(\varphi)}}{\varphi - h(\varphi)},\ H \in \int \frac{d\varphi}{\varphi - h(\varphi)}, \quad \varphi(t,x) := \frac{x}{t},$$

iar integrala generală se exprimă ca

$$t\cdot \mathrm{e}^{H(\varphi)} = C, \quad C > 0.$$

Soluţia exerciţiului 5.12. Avem

$$\frac{d\mu}{d\varphi} - \frac{h'(\varphi)}{\varphi - h(\varphi)}\cdot \mu = 0.$$

Plecând de la observaţia că $d\varphi = \frac{1}{t}\cdot(-\varphi dt + dx)$, reorganizăm expresia cu diferenţiale (5.18) a ecuaţiei drept

$$e^{H(\varphi)}\cdot dt + e^{H(\varphi)}\cdot\frac{-\varphi dt + dx}{\varphi - h(\varphi)} = 0,$$

ceea ce implică

$$e^{H(\varphi)}\cdot dt + te^{H(\varphi)}\cdot\frac{d\varphi}{\varphi - h(\varphi)} = 0,$$

respectiv

$$dU = 0, \quad U(t,\varphi) := t\cdot e^{H(\varphi)}.$$

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

Exerciţiul 5.13. *1)* Determinaţi formula matematică a funcţiei *netede* $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ştiind că ecuaţia

$$y' = e^{h(x,y)} - 1$$

posedă o funcţie μ prezentabilă ca

$$\mu = \mu(\varphi), \quad \varphi(x,y) := x+y,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

2) Integraţi ecuaţia

$$y' = e^{1+y} - 1, \quad x \geq 0,$$

întrebuinţând punctul *1)*.

Soluţia exerciţiului 5.13. *1)* $h(x,y) = G(x+y) + T(x)$, $\mu(\varphi) = e^{-G(\varphi)}$, cu funcţiile G, T netede. *2)* $G(x+y) = x+y$, $T(x) = 1-x$. Integrala generală este $e^y(e + Ce^x) = 1$, $C\in\mathbb{R}$.

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

O formă diferenţială $\omega := M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ai cărei *coeficienţi* M şi N se supun condiţiei de integrabilitate $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ este numită (formă) *exactă*. Acea funcţie μ cu ajutorul căreia, prin înmulţire în ambii membri ai unei ecuaţii exprimate cu diferenţiale, facem forma diferenţială din partea stângă a ecuaţiei exactă — adică, forma (5.18) a devenit *integrabilă*: $\mu\cdot\omega = dU \implies \int(\mu\cdot\omega) = U(x,y) + C$ —, poartă numele de *factor integrant* al formei.

Probleme la limită. În discuţia din textul de faţă au intervenit diverse tipuri de *poziţionare* a datelor impuse unei anumite ecuaţii diferenţiale. Astfel, plasarea perechii (t_0,x_0) în interiorul domeniului de definiţie Ψ al funcţiei g din ecuaţia $x' = g(t,x)$ ne conduce la o *problemă Cauchy*. În schimb, fixarea datei impuse pe $\mathrm{Fr}(\Psi)$ transformă tandemul ecuaţie-şi-date într-o *problemă pe frontieră*.

Datele impuse care se referă fie la trecutul îndepărtat fie la viitorul distant, adică pot fi formulate în termeni de $\lim_{t\to\pm\infty} x(t)$, dau naştere unor *probleme* (cu date) *la limită*.

Exerciţiul 5.14. Fie funcţiile continue $a, g : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ astfel încât

$$\int_0^{+\infty} a(u)du < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dv}{g(v)} = +\infty.$$

Introducem ecuaţia *cu variabile separate* — vezi (5.6) —

$$a(t)dt - \frac{dx}{g(x)} = 0.$$

Atunci,

1) (A. Wintner, 1946) există o *singură* soluţie $r : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ a ecuaţiei pentru care

$$r(0) = 0, \quad \ell \in (0,+\infty), \quad \ell := \lim_{t\to+\infty} r(t).$$

2) (C. Avramescu[6]*, 1968)* Dacă, în plus,

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_v^{+\infty} g(w)dw \right) dv < +\infty,$$

atunci

$$\int_0^{+\infty} [\ell - r(t)]\, dt < +\infty.$$

Soluţia exerciţiului 5.14. Detalii privind problematica se găsesc în lucrarea [2].

Soluţia exerciţiului s-a încheiat. □

[6] Profesor universitar român, titular al cursului de ecuaţii diferenţiale ordinare în anii ’90 ai secolului XX la Facultatea de Matematică a Universităţii din Craiova.

Anexa A
Teorema de inversiune locală în $\mathbb{R}$

În mod tacit, folosim *topologia euclidiană* pe $\mathbb{R}$.

Teorema A.1. *Fie $f : I \to J$ o funcţie de clasă C^1, unde $I, J \subseteq \mathbb{R}$ sunt intervale deschise, nevide. Se dau numerele $i_0 \in I$, $j_0 \in J$ astfel încât*

$$f(i_0) = j_0, \quad f'(i_0) \neq 0.$$

Atunci, există intervalele $I_0 \subseteq I, J_0 \subseteq J$, deschise, nevide, cu $i_0 \in I_0$, $j_0 \in J_0$, pentru care restricţia lui f la I_0, notată $g : I_0 \to J_0$, să fie bijectivă. Mai mult chiar, g^{-1} este de clasă C^1 şi

$$\left(g^{-1}\right)'(j) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(j)\right)}, \quad j \in J_0.$$

Demonstraţie. Parcurgem patru *paşi*. Folosim *notaţiile*:

$$\begin{array}{ll} U + a & := \{u + a \,|\, u \in U\}, \\ a \cdot U & := \{a \cdot u \,|\, u \in U\}, \\ f^{-1}(U) & := \{i \in I \,|\, f(i) \in U\}. \end{array} \tag{A.1}$$

Aici, U este o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$ iar $a \in \mathbb{R}$.

Pasul întâi. **Aducerea problemei la forma cea mai simplă,** printr-o schimbare de variabile afină. Această formă este dată de relaţiile

$$i_0 = j_0 = 0, \quad f'(i_0) = 1. \tag{A.2}$$

Introducem funcţia $h : K \to L$ cu formula

$$h(u) = f(u + i_0) - a \cdot u - j_0, \quad u \in K,$$

unde $K := I + (-i_0)$, $a = f'(i_0) - 1$, $L := (f - a \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}})(I) + (ai_0 - j_0)$ şi $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ este funcţia *identitate* a lui $\mathbb{R}$.

Funcţia $f - a \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ fiind continuă, mulţimea $(f - a \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}})(I)$ este un interval [16, Propoziţia 2, pag. 226], nu neapărat deschis. *Lărgind,* eventual, acest interval, concludem că am construit o funcţie $h : K \to L$, de clasă C^1, între două intervale deschise, nevide.

Observăm că $h(0) = f(i_0) - j_0 = 0$ şi că

$$h'(u) = f'(u + i_0) - a, \quad u \in K,$$

de unde $h'(0) = 1$.

În cele ce urmează, *rolul* funcţiei f va fi jucat de această funcţie h: adică, are loc (A.2).

Pasul al doilea. **Construcţia intervalelor I_0 şi J_0.**

Funcţia f' fiind continuă, există numărul $\Delta > 0$ aşa încât

$$[-\Delta, \Delta] \subset I \cap J, \quad \left|f'(i) - 1\right| \leq \frac{1}{2}$$

pentru orice $i \in [-\Delta, \Delta]$. Aceasta pentru că $i_0 = j_0 = 0 \in I \cap J$.

Îi aplicăm *teorema creşterilor finite* (Lagrange) [16, pag. 283] funcţiei

$$u \in [-\Delta, \Delta] \longmapsto f(u) - u.$$

Astfel, fiind date numerele $u \neq v$ din $[-\Delta, \Delta]$, există numărul $\xi \in (\min\{u, v\}, \max\{u, v\})$ cu proprietatea că

$$[f(u) - u] - [f(v) - v] = \left[f'(\xi) - 1\right] \cdot (u - v),$$

de unde deducem că

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v) - (u - v)| &= |[f(u) - u] - [f(v) - v]| \\ &\leq \left(\sup_{i \in [-\Delta, \Delta]} \left|f'(i) - 1\right| \right) \cdot |u - v| \\ &\leq \frac{1}{2} |u - v|. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Evident, inegalitatea (A.3) este valabilă şi pentru $u = v$: $0 \leq \frac{1}{2} \cdot 0$, deci

$$|f(u) - f(v) - (u - v)| \leq \frac{1}{2} |u - v|, \quad u, v \in [-\Delta, \Delta]. \tag{A.4}$$

Afirmăm că *restricţia funcţiei f la intervalul $[-\Delta, \Delta]$ este injectivă.*

Într-adevăr, să presupunem că pentru două numere $u, v \in [-\Delta, \Delta]$ avem $f(u) = f(v)$. Atunci,

$$\begin{aligned} |u - v| &= |f(u) - f(v) - (u - v)| \\ &\leq \frac{1}{2} |u - v|, \end{aligned}$$

respectiv

$$\frac{1}{2}|u-v| \leq 0.$$

Ultima inegalitate poate avea loc numai dacă $u = v$, ceea ce probează Afirmaţia.

Fixăm numărul $y \in \left(-\frac{\Delta}{3}, \frac{\Delta}{3}\right)$. Introducem şirul $(x_n)_{n\geq 0} \subset \left(-\frac{2\Delta}{3}, \frac{2\Delta}{3}\right)$ dat de relaţiile [6, pag. 59]:

$$x_0 = 0; \quad x_{n+1} = x_n + y - f(x_n), \quad n \geq 0.$$

Afirmăm că *şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este bine-definit:* dacă $x_n \in \left(-\frac{2\Delta}{3}, \frac{2\Delta}{3}\right)$, atunci $x_{n+1} \in \left(-\frac{2\Delta}{3}, \frac{2\Delta}{3}\right)$ pentru orice $n \geq 0$.

Vom întrebuinţa un caz particular al inegalităţii (A.4), cel în care $v = 0$:

$$|f(u) - u| \leq \frac{1}{2}|u|, \quad u \in [-\Delta, \Delta].$$

Aşadar, sunt valabile estimările

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| &\leq |x_n - f(x_n)| + |y| \\ &\leq \frac{1}{2}|x_n| + \frac{\Delta}{3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{2\Delta}{3} + \frac{\Delta}{3} \\ &= \frac{2\Delta}{3}. \end{aligned}$$

Observăm că $x_1 = 0 + y - f(0) = y$. Cum $x_0 \in \left(-\frac{2\Delta}{3}, \frac{2\Delta}{3}\right)$, utilizând *inducţia matematică*, ajungem la

$$x_n \in \left(-\frac{2\Delta}{3}, \frac{2\Delta}{3}\right), \quad n \geq 0.$$

Afirmaţia a fost probată.

Tot pe baza inegalităţii (A.4), deducem că

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= |[x_{n+1} + y - f(x_{n+1})] - [x_n + y - f(x_n)]| \\ &= |f(x_{n+1}) - f(x_n) - (x_{n+1} - x_n)| \\ &\leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

de unde, folosind inducţia matematică, stabilim că

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq \frac{1}{2}|x_1 - x_0| = \frac{1}{2}|y|, \\ |x_3 - x_2| &\leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{4}|x_1 - x_0| = \frac{1}{4}|y|, \\ &\cdots \end{aligned}$$

$$|x_{m+1}-x_m| \;\le\; \frac{1}{2}|x_m-x_{m-1}| \le \cdots \le \frac{1}{2^m}|y| \tag{A.5}$$

pentru orice număr natural m.

Afirmăm că *şirul* $(x_n)_{n\ge 0}$ *este şir Cauchy.*

Astfel, pe baza lui (A.5), avem estimările [16, Propoziţia 1, pag. 98]

$$\begin{aligned}
|x_{n+k}-x_n| &\le |x_{n+k}-x_{n+k-1}|+|x_{n+k-1}-x_{n+k-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n| \\
&\le \left(\frac{1}{2^{n+k-1}}+\frac{1}{2^{n+k-2}}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\cdot|y| \\
&= \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\cdot|y| \\
&\le \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}|y| \\
&= \frac{2}{2^n}\cdot|y|,
\end{aligned}$$

unde $n\ge 0$, $k\ge 1$, care probează Afirmaţia.

Notăm cu x limita şirului $(x_n)_{n\ge 0}$ [16, pag. 103]:

$$x := \lim_{n\to+\infty} x_n \in \left[-\frac{2\Delta}{3},\frac{2\Delta}{3}\right].$$

Funcţia f fiind continuă, prin trecere la limită după n, $n\to+\infty$, în *relaţia de recurenţă* a şirului $(x_n)_{n\ge 0}$, ajungem la

$$x = x+y-f(x),$$

adică la $y=f(x)$.

Introducem mulţimile

$$I_0 := f^{-1}\left(\left(-\frac{\Delta}{3},\frac{\Delta}{3}\right)\right)\cap(-\Delta,\Delta), \quad J_0 := \left(-\frac{\Delta}{3},\frac{\Delta}{3}\right).$$

Din injectivitatea lui f pe intervalul $[-\Delta,\Delta]$ rezultă că

$$I_0 \subseteq \left[-\frac{2\Delta}{3},\frac{2\Delta}{3}\right].$$

Dată fiind continuitatea lui f, mulţimea I_0 este deschisă:

$$I_0 \subsetneq \left[-\frac{2\Delta}{3},\frac{2\Delta}{3}\right].$$

Deoarece *interiorul* mulţimii $\left[-\frac{2\Delta}{3},\frac{2\Delta}{3}\right]$ constituie cea mai mare, în raport cu *incluziunea*, submulţime deschisă a sa [5, Propoziţia 1–4, pag. 21], deducem că

$$I_0 \subseteq \left(-\frac{2\Delta}{3}, \frac{2\Delta}{3}\right).$$

Revenim la inegalitatea (A.4). Astfel, fixând numerele $u, v \in [-\Delta, \Delta]$, avem

$$\begin{aligned} |u-v| - |f(u)-f(v)| &\leq |f(u)-f(v)-(u-v)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u-v|, \end{aligned}$$

respectiv

$$|u-v| \leq 2\,|f(u)-f(v)|\,. \tag{A.6}$$

Aşadar, *restricţia lui f la I_0, $g := f|_{I_0} : I_0 \to J_0$, este o funcţie bijectivă* iar *inversa* ei verifică inegalitatea (A.6):

$$\left|g^{-1}(j_1) - g^{-1}(j_2)\right| \leq 2 \cdot |j_1 - j_2|\,, \quad j_{1,2} \in J_0. \tag{A.7}$$

Cum funcţia g^{-1} este continuă — fiind o *funcţie Lipschitz* [20, pag. 131] —, ea "transportă" mulţimi conexe în mulţimi conexe [5, Propoziţia 3–5, pag. 39], astfel că $g^{-1}(J_0) = I_0$ va fi un *interval deschis* [7, pag. 56] al lui $\mathbb{R}$.

Pasul al treilea. **Calculul derivatei lui g^{-1}.**

Fixăm numărul $v \in I_0$. Din $|g'(v) - 1| \leq \frac{1}{2}$ rezultă că

$$\frac{1}{2} \leq \left|g'(v)\right| \leq \frac{3}{2}.$$

Fie $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Atunci, există numărul $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca

$$[v-\delta, v+\delta] \subset I_0, \quad \left|g'(v) - g'(u)\right| \leq \varepsilon$$

pentru orice $u \in [v-\delta, v+\delta]$. O estimare simplistă a *marginii superioare* a lui δ este dată de incluziunea $[v-\delta, v+\delta] \subset \left(-\frac{2\Delta}{3}, \frac{2\Delta}{3}\right)$, conform căreia *impunem* ca

$$\delta < \frac{2\Delta}{3} - |v|.$$

Îi aplicăm teorema creşterilor finite funcţiei

$$u \in [v-\delta, v+\delta] \longmapsto g(u) - g'(v) \cdot u.$$

La fel ca la *Pasul al doilea*,

$$\begin{aligned} \left|g(u_1) - g(u_2) - g'(v)\cdot(u_1-u_2)\right| &\leq \left(\sup_{u \in [v-\delta, v+\delta]} \left|g'(u) - g'(v)\right|\right) \cdot |u_1 - u_2| \\ &\leq \varepsilon \cdot |u_1 - u_2| \end{aligned}$$

pentru orice $u_{1,2} \in [v-\delta, v+\delta]$, respectiv

$$\begin{aligned}\left|g'(v)\right| \cdot |u_1-u_2| - |g(u_1)-g(u_2)| &\leq \left|g(u_1)-g(u_2)-g'(v)\cdot(u_1-u_2)\right| \\ &\leq \varepsilon |u_1-u_2|\end{aligned}$$

şi

$$|u_1-u_2| \leq \frac{1}{|g'(v)|-\varepsilon} \cdot |g(u_1)-g(u_2)|, \quad |v-u_{1,2}| \leq \delta.$$

Fie $u_1 \neq u_2 \in [v-\delta, v+\delta]$. Atunci, $g(u_1) \neq g(u_2)$ şi, din inegalităţile precedente, deducem că

$$\begin{aligned}\left|g'(v)\cdot(u_1-u_2)-[g(u_1)-g(u_2)]\right| &\leq \varepsilon|u_1-u_2| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|g'(v)|-\varepsilon}\cdot|g(u_1)-g(u_2)|,\end{aligned}$$

respectiv

$$\left|g'(v)\frac{u_1-u_2}{g(u_1)-g(u_2)}-1\right| \leq \frac{\varepsilon}{|g'(v)|-\varepsilon}$$

şi

$$\left|\frac{u_1-u_2}{g(u_1)-g(u_2)}-\frac{1}{g'(v)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{|g'(v)|\cdot[|g'(v)|-\varepsilon]}. \tag{A.8}$$

Estimările (A.4), (A.6) ne conduc la *inegalităţile simultane*

$$\begin{cases} |g(u)-g(v)| \leq |g(u)-g(v)-(u-v)|+|u-v| \\ \qquad\qquad \leq \frac{3}{2}|u-v|, & |v-u| \leq \delta. \\ |u-v| \qquad \leq 2\,|g(u)-g(v)|, \end{cases}$$

Astfel, fiind dat şirul $(u_n)_{n\geq 1} \subset [v-\delta, v+\delta]$, sunt *echivalente* următoarele relaţii:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = v \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(v). \tag{A.9}$$

În estimarea (A.8), introducem mărimile

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u \neq v.$$

Avem

$$\begin{aligned}\left|\frac{u-v}{g(u)-g(v)}-\frac{1}{g'(v)}\right| &\leq \frac{\varepsilon}{|g'(v)|\cdot[|g'(v)|-\varepsilon]} \leq \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} \\ &\leq \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}\end{aligned}$$

pentru orice $u \in [v-\delta, v+\delta]\backslash\{v\}$.

Variindu-l pe ε, $\varepsilon \searrow 0$, deducem că

$$\lim_{u\to v} \frac{u-v}{g(u)-g(v)} = \frac{1}{g'(v)},$$

adică, via (A.9) — folosim *caracterizarea cu şiruri* (Heine) a limitei, vezi [16, pag. 173] —,

$$\lim_{g(u)\to g(v)} \frac{g^{-1}(g(u)) - g^{-1}(g(v))}{g(u)-g(v)} = \frac{1}{g'(v)}.$$

Am ajuns la egalitatea

$$\left(g^{-1}\right)'(g(v)) = \frac{1}{g'(v)}.$$

Pasul al patrulea. **Continuitatea lui** $\left(g^{-1}\right)'$.

Egalitatea anterioară se rescrie ca

$$\left(g^{-1}\right)'(j) = \frac{1}{g'(g^{-1}(j))}, \quad j \in J_0.$$

Funcţia g^{-1} fiind continuă — (A.7) — şi funcţia

$$i \in I_0 \longmapsto \frac{1}{g'(i)} \in \left[-2, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 2\right]$$

fiind, la rândul ei, continuă, funcţia

$$\frac{1}{g'} \circ g^{-1}$$

va fi continuă în J_0.

Justificarea s-a încheiat. □

Referinţe Bibliografice

1. Arnold, V.I.: *Ecuaţii diferenţiale ordinare.* Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti (1978)
2. Avramescu, C.: *Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non linéaires.* Ann. Mat. pura appl. (IV) **LXXXI**, 147–168 (1969)
3. Bihari, I.: *A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. **7**, 81–94 (1956)
4. Bihari, I.: *Researches of the boundedness and stability of the solutions of nonlinear differential equations.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. **8**, 260–278 (1957)
5. Boboc, N.: *Funcţii complexe.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti (1969)
6. Cartan, H.: *Calcul différentiel.* Hermann, Paris (1964)
7. Chinn, W.G.; Steenrod, N.E.: *Introducere în topologie.* Editura tehnică, Bucureşti (1981)
8. Gronwall, T.H.: *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations.* Ann. Math. **20**, 292–296 (1919)
9. Haimovici, A.; Corduneanu, A.; Cohal, L.; Papuc, L.: *Elemente de geometrie a planului.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti (1968)
10. Halanay, A.: *Ecuaţii diferenţiale.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti (1972)
11. Hartmann, P.: *Ordinary differential equations.* Wiley & Sons, New York (1964)
12. Ionescu, D.V.: *Ecuaţii diferenţiale şi integrale.* Ediţia a doua. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti (1972)
13. Luzin, N.N.: *Calculul diferenţial.* Ediţia a IV-a. Editura tehnică, Bucureşti (1954)
14. Luzin, N.N.: *Calculul integral.* Ediţia a II-a. Editura tehnică, Bucureşti (1955)
15. Mustafa, O.G.: *Elipsa. Formule, comentarii.* Editura Sitech, Craiova (2023) `https://bit.ly/elipse2022`
16. Nicolescu, M.; Dinculeanu, N.; Marcus, S.: *Analiză matematică. Volumul I.* Ediţia a treia. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti (1966)
17. Nicolescu, M.; Dinculeanu, N.; Marcus, S.: *Analiză matematică. Volumul II.* Ediţia a doua. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti (1971)
18. Ouyang, L.: *The boundedness of solutions of linear differential equation* $y'' + A(t)y = 0$. Shuxue Jinzhan **3**, 409–415 (1957)
19. Rogai, E.: *Exerciţii şi probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale.* Editura tehnică, Bucureşti (1965)
20. Sburlan, S.: *Principiile fundamentale ale matematicii moderne.* Lecţii de analiză matematică. Editura Academiei Române, Bucureşti (1991)
21. Stepanov, V.V.: *Curs de ecuaţii diferenţiale.* Ediţia a cincea. Editura tehnică, Bucureşti (1955)
22. Susskind, L.; Hrabovsky, G.: *The Theoretical Minimum. What you need to know to start doing physics.* Basic Books, New York (2013)
23. Teodorescu, N.; Olariu, V.: *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale. Volumul I: Ecuaţii diferenţiale.* Editura tehnică, Bucureşti (1978)

Index

aproximaţii succesive, Picard, 37

bila B^2, 30
bila B^∞, 30

chestiunea perturbaţiei, 24
chestiunea unicităţii, 24
clasa C^1, 1
condiţia de integrabilitate, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, 77
condiţia de semn, 1
constanta de integrare, 13
cutia problemei, K, 36
cvadratură, 52

data impusă, 3
date la limită, 82
date pe frontieră, 41

ecuaţia funcţională, 52
ecuaţia integrală, 16
estimarea apriorică, 16
existenţa în viitor, 26
explozia în timp finit, 26
exprimarea afină, f, 61
exprimarea pătratică, f, 61

factorul integrant, μ, 81
forma diferenţială, $M(x,y)dx+N(x,y)dy$, 77
forma diferenţială exactă, $\omega = dU$, 81
forma normală, 12

graficul funcţiei, G_f, 62

inegalitatea Gronwall-Bellman, 18
inegalitatea lui Bihari, 17
inegalitatea lui Ouyang, 21
inegalităţile lui Ceaplîghin, 21
integrala generală, 13
integrala particulară, 13
integrarea unei ecuaţii, 52
intervalul maximal de existenţă, 26
intervalul maximal, V_g, 34
invarianţa diferenţialei, $df(g) = f'(g)dg$, 79
$I_{u,v}$, 36

operatorul morsă, :=, 2

partea liniară şi omogenă, 11
problema Cauchy, 3
problema finală, 57
problema iniţială, 48

răsturnarea ecuaţiei, 9

soluţia generală, 12
soluţia particulară, 13
soluţia singulară, 51

topologia relativă a lui X pe A, 36

variabila dependentă, 1
variabila independentă, 1