Octavian G. Mustafa

# Elipsa

## Formule, comentarii

Publicaţiile DAL
Craiova

Fişier prelucrat în data de [August 7, 2023]

# Avertisment

Acest eseu nu a fost raportat vreunui referent. În consecinţă, conţinutul său trebuie considerat “ca atare.”

Autorul vă aşteaptă comentariile la adresa lui de e-mail[1] şi vă mulţumeşte anticipat pentru efortul depus.

Fiecare proiect de la *Publicaţiile DAL* trebuie considerat “şantier” dacă nu este declarat altfel. Versiunea sa este cea a datei de pe pagina cu titlul.

Craiova, Mai 18, 2015 *O.G.M.*

[1] `octawian@yahoo.com`

# Prefaţă

În cadrul unui curs de *mecanică teoretică* întâlnim două probleme fundamentale privind mişcarea: cea a particulei aflate sub acţiunea *forţei elastice* — denumită, uneori, *problema oscilatorului eliptic* —, respectiv cea a particulei deplasându-se *în câmpul gravitaţional* (punctiform) al Soarelui. În ambele probleme, traiectoriile sunt elipse. În prima, centrul elipsei se găseşte pe linia de acţiune a forţei [8, pag. 332]. În cea de-a doua problemă, sursa atracţiei este situată într-unul din focarele elipsei [8, pag. 355].

Ne putem întreba dacă este nevoie de *tratamente diferite* ale calculelor privind elipsa pentru a aborda eficient fiecare dintre probleme. Răspunsul este *nu*. Paginile care urmează conţin o *prezentare unitară* a formulelor referitoare la elipsă ce sunt utilizate în problemele menţionate anterior.

O variantă a materialului de faţă a fost tipărită la Editura Sitech din Craiova, în anul 2023 (**ISBN** 978-606-11-8410-1).

Craiova, `[August 7, 2023]` *O.G.M.*

# Cuprins

# Lista de Figuri

# Capitolul 1
# Elemente introductive

## 1.1 Planul problemei. Vectori şi operaţii cu vectori

Prezentarea din materialul de faţă priveşte o *secţiune conică* (elipsa) situată într-un *plan fix*, planul problemei.

Utilizăm formalismul *puncte–vectori liberi–vectori legaţi* din tutorialul [10, Capitolul 1]. Operaţiile cu vectori, în două, respectiv trei dimensiuni, se bazează pe lucrarea [11, Capitolul 4, Secţiunea 4.7]. Astfel, calculele se realizează cu *vectori liberi* iar în desene sunt folosiţi *vectorii legaţi*.

Prin $E_2 = \left(\mathbb{R}^2 \times \{0\}, d\right)$ — aici, $d$ este restricţia *distanţei euclidiene* din $\mathbb{R}^3$ — înţelegem *spaţiul metric* complet al punctelor din planul elipsei. Cu segmentele orientate — elemente ale mulţimii $\left(\mathbb{R}^2 \times \{0\}\right)^2$ — construim *spaţiul liniar topologic şi euclidian* $T\mathbb{R}^2$, având scalari din corpul $\mathbb{R}$, al vectorilor liberi din planul elipsei.

## 1.2 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie reperul $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\mathscr{B}}) \equiv Oxy$, unde $\mathscr{B} = \left\{\bar{i}, \bar{j}\right\}$ este baza canonică a planului $T\mathbb{R}^2$.

Introducem dreapta $\Delta = \Delta(B_0, \overrightarrow{u})$ — trecând prin punctul $B_0 \in E_2$ şi având vectorul director $\overline{u}$ necunoscut (deocamdată) [5, pag. 66] —, de ecuaţie carteziană generală [5, pag. 117]

$$ax + by + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

cu $a^2 + b^2 > 0$.

Fie $B \in \Delta$ un punct oarecare şi $x = x_B$, $y = y_B$. Relaţiile

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ ax_{B_0} + by_{B_0} + c = 0 \end{cases}$$

ne conduc la

$$ax+by+\left(-ax_{B_0}-by_{B_0}\right)=0$$

şi la — pentru $b \neq 0$ —

$$y-y_{B_0}=-\frac{a}{b}(x-x_{B_0}). \tag{1.1}$$

Pe baza estimării (1.1), alegând convenabil punctul $B$, *construim* vectorul director al dreptei $\Delta$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} &\equiv \overline{u}=\overline{B_0B}\equiv\begin{pmatrix}x-x_{B_0}\\y-y_{B_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_{B_0}\\-\frac{a}{b}(x-x_{B_0})\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}, \qquad b\neq 0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Cazul $b=0$ este cel al *dreptei verticale* $\Delta$. Aici, optăm pentru $\overline{u}=-\overline{j}\equiv\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

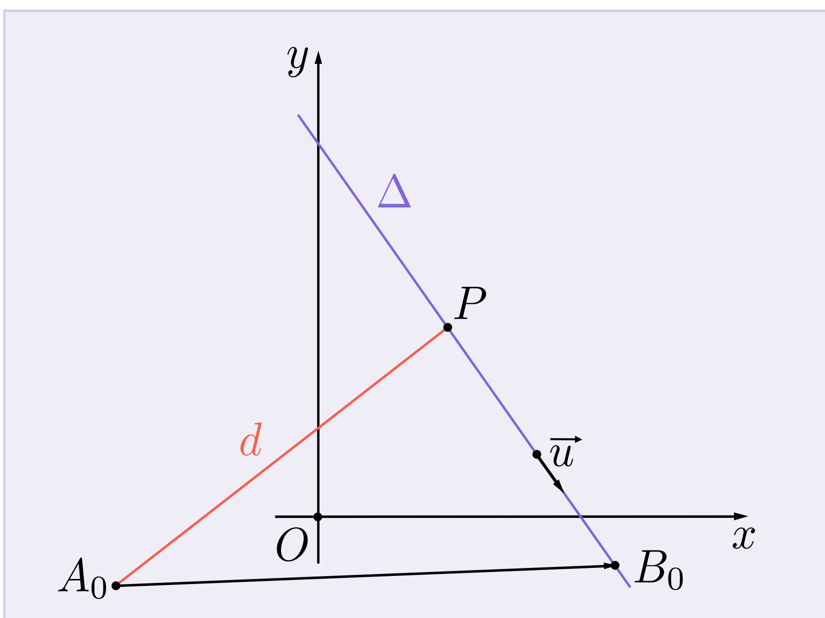


**Fig. 1.1** Distanţa $d=\operatorname{dist}(A_0,\Delta)=\frac{\left|\overline{u}\times\overline{A_0B_0}\right|}{u}=\frac{\left|ax_{A_0}+by_{A_0}+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, unde $u=|\overline{u}|$.

Notăm cu $P$ piciorul perpendicularei duse din punctul (oarecare) $A_0 \in E_2$ la dreapta $\Delta$. În triunghiul dreptunghic $A_0PB_0$ au loc relaţiile [5, pag. 39, ecuaţia

(10.7)]

$$
\begin{aligned}
d &= \left|\overline{A_0P}\right| = \left|\overline{A_0P}\right| \cdot 1 \\
&= \left|\overline{A_0P}\right| \cdot |\text{versorul vectorului } \overline{u}| \cdot \sin(\angle A_0PB_0) \\
&= \left|\overline{A_0P} \times (\text{versorul vectorului } \overline{u})\right| = \frac{\left|\overline{A_0P} \times \overline{u}\right|}{u} \\
&= \frac{\left|\left(\overline{A_0P} + \overline{PB_0}\right) \times \overline{u}\right|}{u} \qquad \left(\text{vectorii } \overline{PB_0} \text{ şi } \overline{u} \text{ sunt coliniari!}\right) \\
&= \frac{\left|\overline{A_0B_0} \times \overline{u}\right|}{u} = \frac{\left|\overline{u} \times \overline{A_0B_0}\right|}{u}.
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Conform [11, Exerciţiul 4.25],

$$
\begin{aligned}
\overline{u} \times \overline{A_0B_0} &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ x_{B_0} - x_{A_0} & y_{B_0} - y_{A_0} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ x_{B_0} - x_{A_0} & y_{B_0} - y_{A_0} \end{vmatrix} \cdot \overline{k} \\
&= \begin{vmatrix} u_1 & x_{B_0} - x_{A_0} \\ u_2 & y_{B_0} - y_{A_0} \end{vmatrix} \cdot \overline{k},
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

respectiv

$$
\frac{\left|\overline{u} \times \overline{A_0B_0}\right|}{u} = \frac{\left|\begin{vmatrix} u_1 & x_{B_0} - x_{A_0} \\ u_2 & y_{B_0} - y_{A_0} \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}.
$$

Pentru $b \neq 0$, via (1.2),

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\left|\begin{vmatrix} 1 & x_{B_0} - x_{A_0} \\ -\frac{a}{b} & y_{B_0} - y_{A_0} \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \frac{\left|b \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_{B_0} - x_{A_0} \\ -\frac{a}{b} & y_{B_0} - y_{A_0} \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|\begin{vmatrix} b & x_{B_0} - x_{A_0} \\ -a & y_{B_0} - y_{A_0} \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|b(y_{B_0} - y_{A_0}) + a(x_{B_0} - x_{A_0})|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|(ax_{B_0} + by_{B_0} + c) - (ax_{A_0} + by_{A_0} + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (B_0 \in \Delta) \\
&= \frac{|ax_{A_0} + by_{A_0} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Vezi [5, pag. 121, ecuaţia (2.8)].

Pentru $b = 0$,

$$
\begin{aligned}
d &= \left| \begin{vmatrix} 0 & x_{B_0} - x_{A_0} \\ -1 & y_{B_0} - y_{A_0} \end{vmatrix} \right| \\
&= \left| x_{A_0} - x_{B_0} \right| \qquad (\{B_0\} = \Delta \cap Ox) \\
&= \frac{\left|1 \cdot x_{A_0} + 0 \cdot y_{A_0} + (-x_{B_0})\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}.
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

### *1.2.1 Calculul vectorului $\overline{A_0P}$. Ecuaţia dreptei $A_0P$*

În cazul *dreptei oblice* $\Delta$ — adică, $a \cdot b \neq 0$ —, via teorema lui Erhard Schmidt [10, pag. 16] şi formula dublului produs vectorial [11, Exerciţiul 4.34], deducem că

$$
\begin{aligned}
\overline{A_0P} &= \frac{\left(\overline{u} \times \overline{A_0B_0}\right) \times \overline{u}}{u^2} \\
\text{(vezi (1.4))} \qquad &= \frac{1}{u^2} \cdot \left[u_1\left(y_{B_0} - y_{A_0}\right) - u_2\left(x_{B_0} - x_{A_0}\right)\right] \cdot \left(\overline{k} \times \overline{u}\right) \\
&= \frac{u_1\left(y_{B_0} - y_{A_0}\right) - u_2\left(x_{B_0} - x_{A_0}\right)}{u^2} \cdot \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{u_1\left(y_{B_0} - y_{A_0}\right) - u_2\left(x_{B_0} - x_{A_0}\right)}{u_1^2 + u_2^2} \cdot \left(-u_2 \cdot \overline{i} + u_1 \cdot \overline{j}\right) \\
&= \frac{b^2\left(y_{B_0} - y_{A_0}\right) + ab\left(x_{B_0} - x_{A_0}\right)}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \overline{i} + \overline{j}\right) \\
&= \frac{b\left(ax_{B_0} + by_{B_0} + c\right) - b\left(ax_{A_0} + by_{A_0} + c\right)}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \overline{i} + \overline{j}\right) \\
&= -\frac{b\left(ax_{A_0} + by_{A_0} + c\right)}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \overline{i} + \overline{j}\right).
\end{aligned}
$$

Astfel, vectorul $\overline{v} = \frac{a}{b} \cdot \overline{i} + \overline{j}$ poate fi utilizat drept vector director al dreptei $A_0P$.

Alegând convenabil punctul $C \in A_0P$, putem scrie că — $x = x_C$ şi $y = y_C$ —

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \equiv \overline{v} = \overline{A_0C} \\
&\equiv \begin{pmatrix} x - x_{A_0} \\ y - y_{A_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \cdot (y - y_{A_0}) \\ y - y_{A_0} \end{pmatrix}, \qquad a \cdot b \neq 0.
\end{aligned}
$$

Am ajuns la ecuaţia carteziană a dreptei $A_0P$,

$$
y - y_{A_0} = \frac{b}{a}(x - x_{A_0}). \tag{1.7}
$$

## 1.3 Intersecţia a două drepte concurente

Ştiind că dreptele $\Delta_1 = \Delta(A, \overrightarrow{u})$ şi $\Delta_2 = \Delta(B, \overrightarrow{v})$ se intersectează în punctul $N$ — $\overline{u} \times \overline{v} \neq 0$ —, ne interesează *vectorul de poziţie* al acestuia în reperul $Oxy$.

Introducem vectorii $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$. Există numerele $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\begin{cases} \overline{ON} = \overline{OA} + \overline{AN} = \overline{a} + \lambda \cdot \overline{u}, \\ \overline{ON} = \overline{OB} + \overline{BN} = \overline{b} + \mu \cdot \overline{v}, \end{cases}$$

de unde

$$\overline{a} + \lambda \cdot \overline{u} = \overline{b} + \mu \cdot \overline{v}. \tag{1.8}$$

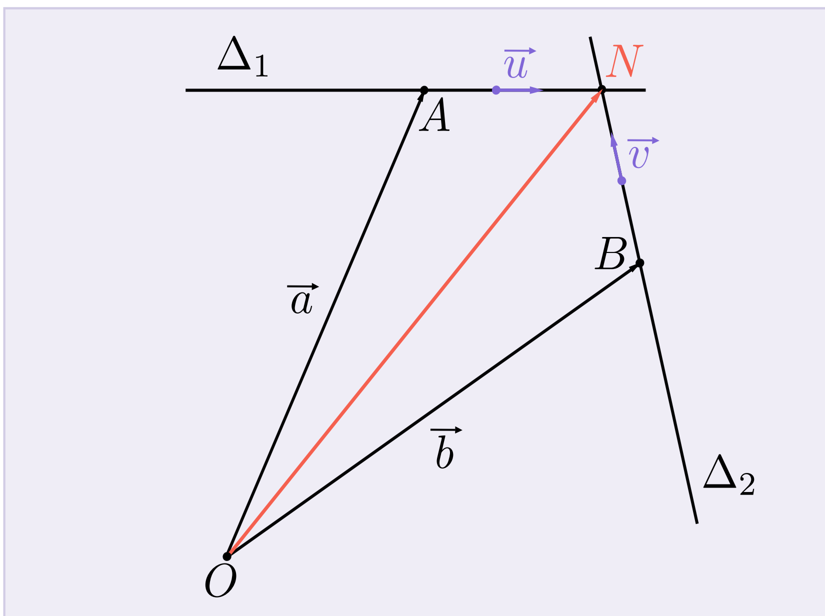


**Fig. 1.2** Dreptele concurente $\Delta_1 = \Delta(A, \overrightarrow{u})$ şi $\Delta_2 = \Delta(B, \overrightarrow{v})$.

Înmulţind — produs scalar — ecuaţia (1.8) cu $\overline{u}$, respectiv cu $\overline{v}$, ajungem la sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} u^2 \cdot \lambda + [-(\overline{u} \cdot \overline{v})] \cdot \mu = (\overline{b} - \overline{a}) \cdot \overline{u}, \\ (\overline{u} \cdot \overline{v}) \cdot \lambda + (-v^2) \cdot \mu = (\overline{b} - \overline{a}) \cdot \overline{v}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Determinantul sistemului algebric are formula

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} u^2 & -(\overline{u}\cdot\overline{v}) \\ \overline{u}\cdot\overline{v} & -v^2 \end{vmatrix} &= -u^2v^2 + (\overline{u}\cdot\overline{v})^2 \\ &= -\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2 \neq 0.\end{aligned}$$

Aşadar, sistemul (1.9) este cramerian, adică *există o singură pereche* $(\lambda,\mu)$ *care să verifice ecuaţia (1.8)*.

Soluţiile sistemului algebric (1.9) au formulele de mai jos[1]:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\begin{vmatrix} (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{u} & -(\overline{u}\cdot\overline{v}) \\ (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{v} & -v^2 \end{vmatrix}}{-\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} = \frac{\begin{vmatrix} (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{u} & \overline{u}\cdot\overline{v} \\ (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{v} & v^2 \end{vmatrix}}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{u} & \overline{u}\cdot\overline{v} \\ (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{v} & \overline{v}\cdot\overline{v} \end{vmatrix}}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} = \frac{\begin{vmatrix} (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{u} & (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{v} \\ \overline{v}\cdot\overline{u} & \overline{v}\cdot\overline{v} \end{vmatrix}}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} = \frac{\left[(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{v}\right]\cdot(\overline{u}\times\overline{v})}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} \\ &= \frac{(\overline{b}-\overline{a},\overline{v},\overline{u}\times\overline{v})}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} \qquad (1.10)\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\begin{vmatrix} u^2 & (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{u} \\ \overline{u}\cdot\overline{v} & (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{v} \end{vmatrix}}{-\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} = \frac{\begin{vmatrix} (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{u} & \overline{u}\cdot\overline{u} \\ (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{v} & \overline{u}\cdot\overline{v} \end{vmatrix}}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{u} & (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{v} \\ \overline{u}\cdot\overline{u} & \overline{u}\cdot\overline{v} \end{vmatrix}}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} = \frac{\left[(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{u}\right]\cdot(\overline{u}\times\overline{v})}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} \\ &= \frac{(\overline{b}-\overline{a},\overline{u},\overline{u}\times\overline{v})}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2}. \qquad (1.11)\end{aligned}$$

[1] Vezi [11, Exerciţiul 4.35].

# Capitolul 2
# Construcţia elipsei pe baza parametrilor $e$, $h$

## 2.1 Determinarea parametrilor $a$, $b$, $c$, $p$

Fiind dată dreapta $L$ — *directoarea* elipsei [5, pag. 183] —, de ecuaţie carteziană

$$x - h = 0,$$

ne interesează *locul geometric*[1] *al punctelor* $M$ *pentru care* $d(M,O) = e \cdot d(M,L)$. Constanta $e \in (0,1)$ poartă numele de *excentricitatea* elipsei [5, pag. 184].

Conform (1.5), avem ecuaţia algebrică

$$x^2 + y^2 = e^2 \cdot (x-h)^2, \tag{2.1}$$

pe care o rescriem ca

$$(1-e^2)x^2 + 2he^2x + y^2 = e^2h^2. \tag{2.2}$$

Aici, *numărul* $h > 0$ *este o constantă*.

Prelucrăm ecuaţia (2.2), după cum urmează:

$$x^2 + \frac{2he^2}{1-e^2} \cdot x + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2h^2}{1-e^2},$$

respectiv

$$x^2 + 2\frac{he^2}{1-e^2}x + \left(\frac{he^2}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2h^2}{1-e^2} + \left(\frac{he^2}{1-e^2}\right)^2$$

şi

[1] Valabilitatea acestei descrieri a conicelor este demonstrată de Pappus (din Alexandria), caracterizarea fiindu-i cunoscută lui Euclid, vezi [7, pag. xxxvi, xxxviii]. Termenul de *elipsă* a fost introdus de Apollonius (din Perga) [7, pag. lxxix], care foloseşte expresia *e lipsă* (de arie), adică ἐλλείπει [7, pag. 12].

$$\left(x+\frac{he^2}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{(1-e^2)e^2h^2+h^2e^4}{(1-e^2)^2}=\frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}.$$

Astfel, am ajuns la

$$\frac{\left(x+\frac{he^2}{1-e^2}\right)^2}{\frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{e^2h^2}{1-e^2}}=1. \tag{2.3}$$

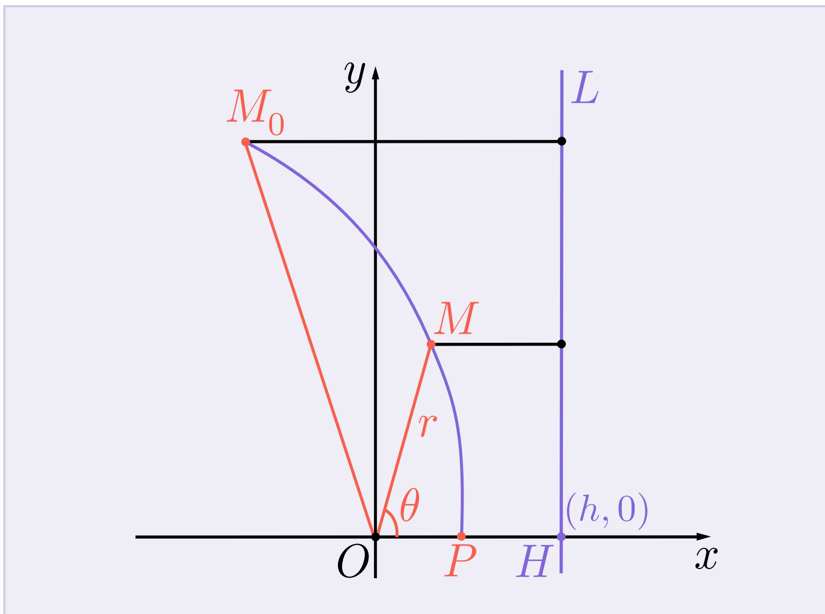


**Fig. 2.1** $d(M,O)=e\cdot d(M,L)$ şi $d(O,P)<\frac{h}{2}$.

Introducem *numerele pozitive*

$$a=\frac{eh}{1-e^2},\quad b=\frac{eh}{\sqrt{1-e^2}},\quad c=\frac{he^2}{1-e^2}. \tag{2.4}$$

Se obişnuieşte ca numărul $a$ să fie denumit (informal) *semiaxa mare* (a elipsei) iar numărul $b$ *semiaxa mică* [5, pag. 186]. Pentru numărul $2\cdot c$ este utilizată frecvent expresia *distanţă focală*.

De aici rezultă că

$$b=a\sqrt{1-e^2},\quad c=ae. \tag{2.5}$$

Ecuaţia (2.3) se rescrie ca

$$\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.6}$$

**Lema 2.1.** *Au loc relaţiile*

$$c^2=a^2-b^2, \quad h+c=\frac{a}{e}. \tag{2.7}$$

*Demonstraţie.* Observăm că

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= \frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}-\frac{e^2h^2}{1-e^2}=\frac{e^2h^2}{1-e^2}\cdot\left[\frac{1}{1-e^2}-1\right] \\ &= \frac{e^4h^2}{(1-e^2)^2} \end{aligned}$$

şi

$$\frac{a}{e}=\frac{h}{1-e^2}=h+\frac{he^2}{1-e^2}.$$

Justificarea s-a încheiat. □

Conform (2.6), *elipsa intersectează axa orizontală $Ox$* în punctele de abscise $x_{1,2}$, unde

$$x_{1,2}+c=\pm a,$$

adică — via (2.5) —

$$x_1=-(a+c)=-a(1+e), \quad x_2=-c+a=a(1-e),$$

respectiv *axa verticală $Oy$* în punctele de ordonate $y_{1,2}$, unde

$$y_{1,2}^2=b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=b^2\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\frac{b^4}{a^2}.$$

Estimările

$$0<x_2=\frac{eh}{1+e}<\frac{h}{2} \tag{2.8}$$

arată că *elipsa intersectează semiaxa $(Ox$ într-un punct $P\in(OH)$, unde $\{H\}=L\cap Ox$.*

Numărul $p=|y_{1,2}|$ poartă două nume: *parametrul* (*ordonatelor*, elipsei) [5, pag. 200], respectiv *semi-latus rectum*[2] [15, pag. 36].

**Lema 2.2.** *Au loc relaţiile*

[2] Segmentul vertical de lungime $2p$ având-ul pe $O$ drept mijloc este *latura înălţată*, *latus rectum*, adică ἡ ὀρθία πλευρά, [7, pag. clxii, 11].

$$p = e \cdot h = \frac{b^2}{a}. \tag{2.9}$$

*Demonstraţie.* Concluzia rezultă din (2.4), (2.5):

$$\frac{b^2}{a} = a(1 - e^2).$$

Justificarea s-a încheiat. □

În coordonate polare,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

ecuaţia (2.1) se rescrie ca

$$r^2 = e^2 \cdot (r\cos\theta - h)^2,$$

de unde — via (2.8) —

$$r = e \cdot (h - r\cos\theta), \quad r = \frac{e \cdot h}{1 + e\cos\theta},$$

respectiv

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

**Lema 2.3.** *Au loc relaţiile*

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad h = \frac{b^2}{c}. \tag{2.10}$$

*Demonstraţie.* Expresia lui $e$ rezultă din (2.5). Conform (2.4),

$$\begin{aligned} h &= \frac{1 - e^2}{e} \cdot a = \frac{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \cdot a = \frac{\frac{b^2}{a}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \\ &= \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. □

## 2.2 Centrul şi focarele elipsei. Dreptele $L$, $L'$

Rescriem ecuaţia (2.6) sub forma

$$\frac{[(-2c-x)+c]^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Astfel, *punctul* $M(x,y)\in E_2$ *se află pe elipsă dacă şi numai dacă punctul* $M'(-2c-x,y)$ *este pe elipsă.*

Introducem punctele $C(-c,0)$, $F'(-2c,0)$ şi dreapta $L'$, de ecuaţie carteziană

$$x-(-h-2c)=0.$$

Punctele $F=O$ şi $F'$ se numesc *focarele*[3] (elipsei) iar $C$ reprezintă *centrul* ei [5, pag. 186].

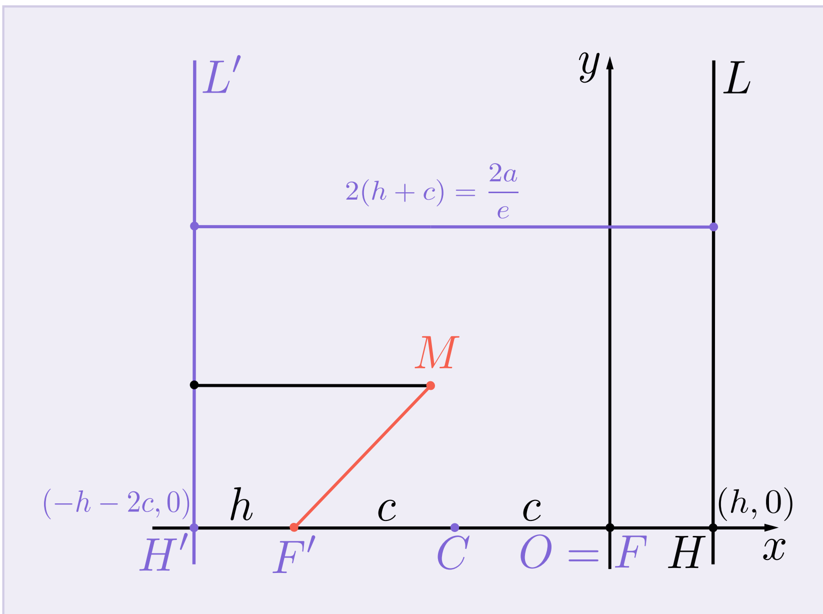


**Fig. 2.2** Focarele $O$, $F'$ şi centrul $C$. Aici, $d(M,F')=e\cdot d(M,L')$.

Remarcăm că, odată cu punctul $M'$, pe elipsă se găsesc şi punctele[4]

$$M''(-2c-x,-y),\quad M'''(x,-y).$$

De aceea, *verticala trecând prin punctul* $C$, de ecuaţie carteziană

$$x+c=0,$$

[3] Acestea sunt *focarele reale* ale elipsei, conform [5, pag. 313]. Apollonius nu defineşte focarele elipsei, referindu-se la ele ca la *punctele care decurg din aplicare*, τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα [7, pag. 113].

[4] Vezi şi [Apollonius, II.47] în [7, pag. 70].

şi orizontala $Ox$ sunt *axe de simetrie* ale elipsei iar punctul $C$ este *centrul de simetrie* al acesteia.

Punctele de intersecţie ale elipsei cu axele de simetrie[5] se numesc *vârfurile elipsei* [5, pag. 186].

**Lema 2.4.** *Are loc relaţia*

$$(1-e^2)b^2 = e^2(h+2c)^2 - 4c^2.$$

*Demonstraţie.* Din (2.4) rezultă că $(1-e^2)b^2 = e^2h^2$.

Egalitatea

$$e^2h^2 = e^2(h+2c)^2 - 4c^2$$

este echivalentă cu

$$\begin{aligned} 0 &= 4hce^2 + 4c^2(e^2-1) \\ &= 4he^2 \cdot \frac{he^2}{1-e^2} - 4(1-e^2) \cdot \frac{h^2e^4}{(1-e^2)^2}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. □

Conform (1.6), avem

$$d(M,L') = |x+h+2c|, \quad d(M,F') = \sqrt{(x+2c)^2+y^2}.$$

Ne punem întrebarea: *ecuaţia $d(M,F') = e \cdot d(M,L')$ conduce la (2.2)?* Răspunsul este *da*. Într-adevăr, din

$$(x+2c)^2 + y^2 = e^2 \cdot (x+h+2c)^2$$

rezultă că

$$x^2 + y^2 + 4c^2 + 4cx = e^2x^2 + e^2(h+2c)^2 + 2e^2(h+2c)x,$$

respectiv

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + x \cdot (4c - 4e^2c - 2he^2) = e^2(h+2c)^2 - 4c^2.$$

*Coeficientul lui $x$* se rescrie ca

$$\begin{aligned} 2\left[2(1-e^2)c - he^2\right] &= 2\left[2(1-e^2) \cdot \frac{he^2}{1-e^2} - he^2\right] \\ &= 2he^2. \end{aligned}$$

[5] *Diametrele* elipsei (coarde care trec prin $C$) corespunzând axelor de simetrie sunt numite de Arhimede (diametre) *conjugate*, συζυγεῖς διάμετροι, [7, pag. xlix, clxi].

*Termenul liber* are, pe baza Lemei 2.4, expresia $e^2h^2$.

## 2.3 Suma şi raportul distanţelor de la punctul curent la focare

Vom stabili identitatea[6]

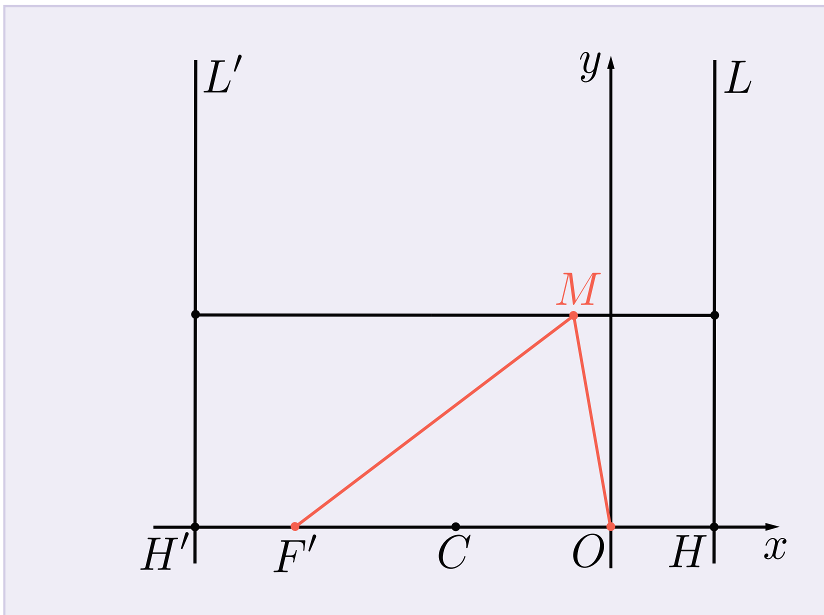


**Fig. 2.3** $d(M,O)+d(M,F')=2a$ şi $\frac{d(M,O)}{d(M,F')}=\frac{|h-x_M|}{\left|\frac{2a}{e}-(h-x_M)\right|}$.

$$d(M,O)+d(M,F')=2a. \tag{2.11}$$

Relaţia

$$\sqrt{(x+2c)^2+y^2}=2a-\sqrt{x^2+y^2}$$

este ridicată la pătrat, obţinându-se ecuaţia

$$c^2+cx=a^2-a\sqrt{x^2+y^2}.$$

[6] Vezi [Apollonius, III.51, 52] în [7, pag. 118].

Apoi, via (2.7), respectiv (2.5), avem

$$a\sqrt{x^2+y^2} = b^2 - cx = a^2(1-e^2) - aex,$$

respectiv

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \left[a(1-e^2)-ex\right]^2 = a^2(1-e^2)^2 + e^2x^2 - 2ae(1-e^2)x \\ &= e^2h^2 + e^2x^2 - 2he^2x. \end{aligned}$$

Ultima estimare ne conduce la (2.2).

Mai departe, vom proba identitatea

$$\frac{d(M,O)}{d(M,F')} = \frac{|h-x_M|}{\left|\frac{2a}{e} - (h-x_M)\right|}. \tag{2.12}$$

Conform (1.6), avem

$$d(M,L) = |x_H - x_M| = |h - x_M|,$$

respectiv

$$d(M,L') = |x_{H'} - x_M| = |(-h-2c) - x_M| = |2(h+c) - (h-x_M)|.$$

Concluzia rezultă din (2.7), de îndată ce observăm că

$$\frac{d(M,O)}{d(M,F')} = \frac{e\cdot d(M,L)}{e\cdot d(M,L')} = \frac{d(M,L)}{d(M,L')}.$$

## 2.4 Intersecţiile paralelelor la axa mare a elipsei, duse prin vârfurile acesteia, cu dreptele $L$, $L'$

Reamintesc estimările (2.8).

**Lema 2.5.** *Fie punctul $N'$, de coordonate $\{x_0, y_0\}$, situat pe elipsă. Atunci, (şi) punctul $N$, de coordonate $\{x, y\}$, unde*

$$\begin{cases} x = -\frac{\mathbf{h}\cdot x_0}{\mathbf{h}-x_0}, \\ y = -\frac{\mathbf{h}\cdot y_0}{\mathbf{h}-x_0}, \end{cases} \qquad cu\ \mathbf{h} = \frac{h}{2},$$

*se găseşte pe elipsă. În plus, punctele $N$, $O$, $N'$ sunt coliniare.*

*Demonstraţie.* Au loc egalităţile

$$(h-2x_0)^2\cdot\left[\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right] = \frac{1}{a^2}(ch-2cx_0-hx_0)^2 + \frac{h^2y_0^2}{b^2} - (h-2x_0)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2}\left[2c(h-x_0)-h(x_0+c)\right]^2+\frac{h^2y_0^2}{b^2}-(h-2x_0)^2\\
&= h^2\left[\frac{(x_0+c)^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right]+\frac{4c^2}{a^2}(h-x_0)^2-4\frac{ch}{a^2}(h-x_0)\cdot(x_0+c)-(h-2x_0)^2\\
&= h^2+\frac{4(a^2-b^2)}{a^2}(h-x_0)^2-\frac{4b^2}{a^2}(h-x_0)(x_0+c)-(h-2x_0)^2\\
&= h^2+4(h-x_0)^2-\frac{4b^2}{a^2}(h-x_0)\cdot(h+c)-(h-2x_0)^2\\
&= h^2+4(h-x_0)^2-\frac{4b^2}{c}(h-x_0)-(h-2x_0)^2\\
&= h^2+4(h-x_0)^2-4h(h-x_0)-(h-2x_0)^2\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

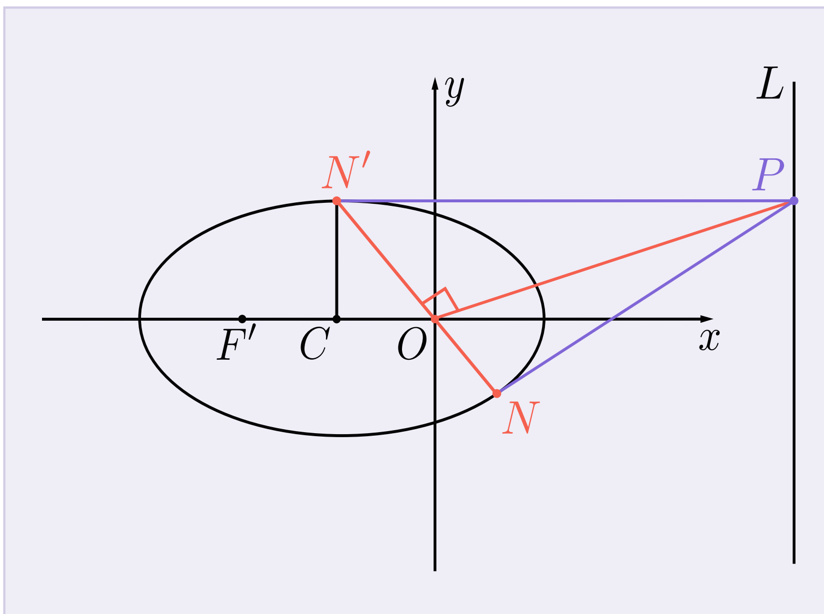


**Fig. 2.4** Punctele $N$, $O$, $N'$ sunt coliniare şi $\overline{OP}\perp\overline{NN'}$, respectiv $\overline{CN'}\perp\overline{PN'}$.

*Presupunând că* $x_0\neq 0$, observăm că

$$y=\frac{y_0}{x_0}\cdot x,$$

adică *punctul* $N$ *se află pe dreapta* $N'O$.

Justificarea s-a încheiat. $\square$

Introducem punctele $P, N' \in E_2$ cu coordonatele

$$\begin{cases} x_P = h, \\ y_P = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = -c, \\ y_0 = b. \end{cases}$$

Atunci,

$$x_N = x = -\frac{hx_0}{h-2x_0} = \frac{hc}{h+2c} = \frac{b^2}{\frac{a^2}{c}+c} = \frac{b^2 c}{a^2+c^2}$$

şi

$$y_N = -\frac{hb}{h+2c} = -\frac{b^3}{a^2+c^2}.$$

**Lema 2.6.** *Fie $m = \frac{1}{e}$. Sunt valabile egalităţile*

$$x_N = \frac{2m}{m^2+1} \cdot a - c, \qquad y_N = \frac{1-m^2}{1+m^2} \cdot b.$$

*Demonstraţie.* Remarcăm că $m = \frac{a}{c}$ şi

$$\frac{2m}{m^2+1} \cdot a - c = \frac{2a^2 c}{a^2+c^2} - c = \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} \cdot c,$$

respectiv

$$\frac{1-m^2}{1+m^2} \cdot b = \frac{c^2-a^2}{a^2+c^2} \cdot b.$$

Justificarea s-a încheiat. □

Introducem vectorii

$$\overline{a} = a \cdot \overline{i}, \qquad \overline{b} = b \cdot \overline{j}.$$

**Lema 2.7.** *Fie $n = 1$. Avem reprezentările*[7]

$$\overline{CP} = m \cdot \overline{a} + n \cdot \overline{b},$$

*respectiv*

$$\overline{CN'} = \frac{m - n\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} \cdot \overline{a} + \frac{n + m\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} \cdot \overline{b}$$

*şi*

[7] Vezi formulele (5.15), (5.16).

$$\overline{CN} = \frac{m + n\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} \cdot \overline{a} + \frac{n - m\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} \cdot \overline{b}$$

*Demonstraţie.* Observăm că $m = \frac{h+c}{a}$ şi

$$\overline{CP} = \overline{CO} + \overline{OP} = c \cdot \overline{i} + \overline{OP} = \frac{c}{a} \cdot \overline{a} + h \cdot \overline{i} + b \cdot \overline{j}.$$

Apoi, folosim Lema 2.6.

Justificarea s-a încheiat. □

**Lema 2.8.** *Triunghiul $PON'$ este dreptunghic, cu ipotenuza $PN'$.*

*Demonstraţie.* Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2e^2 + a^2(1-e^2)^2 + a^2e^2(1-e^2) \\ &= a^2e^2 + \frac{b^4}{a^2} + a^2e^2(1-e^2) \\ &= a^2e^2 + e^2h^2 + b^2e^2, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{e^2} &= a^2 + h^2 + b^2 = (c^2+b^2) + (h^2+b^2) = \left|\overline{ON'}\right|^2 + \left|\overline{OP}\right|^2 \\ &= \left|\overline{N'P}\right|^2. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. □

## 2.5 Hiperbole echilatere trecând prin centrul de simetrie al elipsei

Fie punctele $P, Q \in E_2 \setminus Ox$, de cordonate

$$\begin{cases} x_P = x_1, \\ y_P = y_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_Q = x_2, \\ y_Q = y_2, \end{cases}$$

astfel încât

$$\left( \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ -c & 0 & 1 \end{vmatrix} = \right) \qquad \begin{vmatrix} x_1 + c & y_1 \\ x_2 + c & y_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.13}$$

Observăm că restricţia (2.13) se citeşte ca *necoliniaritatea punctelor $C$, $P$, $Q$*. Vezi [5, pag. 126].

Introducem numerele reale $p$, $q$, nenule, şi hiperbola echilateră $\mathscr{H}_{pq}$ trecând prin $C$, de ecuaţie — conform [5, pag. 240] —

$$(x+c+p)(y+q)-pq=0. \tag{2.14}$$

Cerem ca $Q, P \in \mathscr{H}_{pq}$.

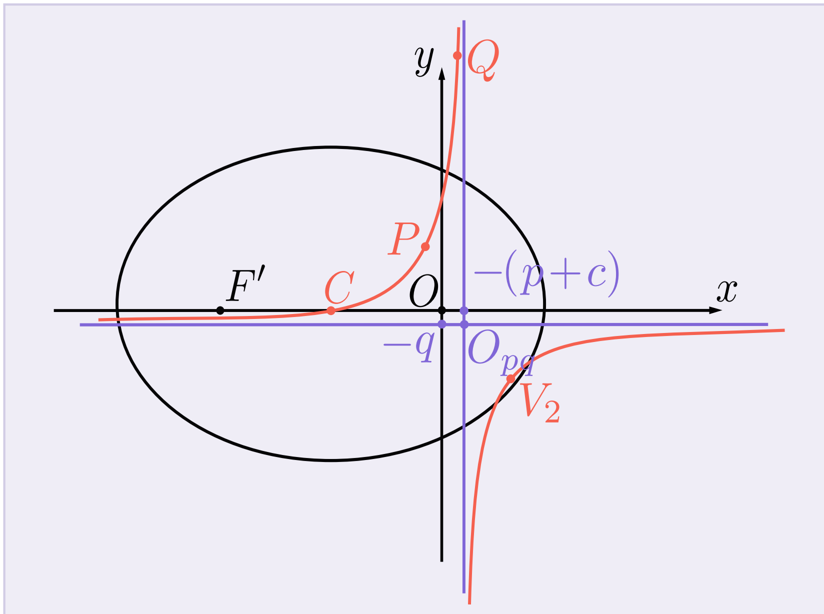


**Fig. 2.5** Hiperbola echilateră de ecuaţie $(x+c+p)(y+q)-pq=0$, unde $p<-c, q>0$, este determinată de punctele necoliniare $C, P, Q$. Asimptotele sale sunt paralele cu axele de simetrie ale elipsei. Dacă vârful $V_2$ se află în interiorul elipsei, atunci hiperbola va avea patru puncte de intersecţie cu elipsa.

Au loc egalităţile

$$p=-(x_1+c)-\frac{x_1+c}{y_1}\cdot q=-(x_2+c)-\frac{x_2+c}{y_2}\cdot q,$$

respectiv

$$(x_2-x_1)y_1y_2=[y_2(x_1+c)-y_1(x_2+c)]\,q$$

şi

$$q=\frac{y_1y_2(x_2-x_1)}{\begin{vmatrix} x_1+c & y_1 \\ x_2+c & y_2 \end{vmatrix}}. \tag{2.15}$$

Apoi,

$$p = -(x_1+c)\left(1+\frac{q}{y_1}\right) = -\frac{(x_1+c)(x_2+c)(y_2-y_1)}{\begin{vmatrix} x_1+c & y_1 \\ x_2+c & y_2 \end{vmatrix}}. \tag{2.16}$$

**Lema 2.9.** *Hiperbola $\mathscr{H}_{pq}$ admite cel puţin două puncte de intersecţie cu elipsa.*

*Demonstraţie.* Fie $\{x,y\}$ coordonatele unui *prezumtiv punct comun*. Atunci,

$$y = -q + \frac{pq}{x+c+p} = -\frac{q(x+c)}{x+c+p},$$

respectiv

$$1 = \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (x+c)^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{b^2(x+c+p)^2}\right].$$

De unde,

$$(x+c)^2(x+c+p)^2 = a^2\left[(x+c+p)^2 - \frac{q^2}{b^2}(x+c)^2\right],$$

respectiv

$$(x+c)^4 + 2p(x+c)^3 + \left[p^2 - a^2\left(1-\frac{q^2}{b^2}\right)\right](x+c)^2 - 2pa^2(x+c) - a^2p^2 = 0.$$

Am obţinut ecuaţia algebrică în necunoscuta $z$,

$$z^4 + 2p\cdot z^3 + \frac{1}{b^2}(p^2b^2 + q^2a^2 - a^2b^2)\cdot z^2 - 2pa^2\cdot z - a^2p^2 = 0, \tag{2.17}$$

unde $z = x+c$.

Produsul rădăcinilor, în $\mathbb{C}$, ale ecuaţiei fiind $-a^2p^2 < 0$, deducem că *măcar două dintre acestea sunt numere reale*.

Justificarea s-a încheiat. $\square$

Planul $E_2$ este împărţit de către dreptele cu ecuaţiile carteziene

$$x+c+p = 0$$

şi

$$y+q = 0$$

în patru cadrane pe care le numerotăm cu $I_{pq}$ – $IV_{pq}$, în sens trigonometric, începând cu cadranul

$$\begin{cases} x+c+p > 0, \\ y+q > 0. \end{cases}$$

*Presupunând că*

$$p = -q < -a,$$

avem $-q < -b$ şi $-(p+c) > a-c$. Astfel, niciun punct de pe elipsă nu se găseşte în cadranul $IV_{pq}$ al planului $E_2$. În concluzie, *ramura hiperbolei $\mathscr{H}_{pq}$ din acest cadran nu intersectează elipsa*, hiperbola şi elipsa având doar două puncte comune.

**Lema 2.10.** *Dacă $a < b\sqrt{2}$, atunci există numerele reale $p, q$, cu $p < -c, q > 0$, astfel încât hiperbola $\mathscr{H}_{pq}$ să intersecteze elipsa în patru puncte distincte.*

*Demonstraţie.* Cum $\frac{c^2}{a^2} < \frac{1}{2}$, fixăm numerele $\varepsilon, q > 0$ suficient de mici încât

$$\frac{c^2}{a^2} + (q+\varepsilon^2) \cdot \left( \frac{2c+\varepsilon^2}{a^2} + \frac{q}{b^2} \right) + q \cdot \frac{c^3}{a^2 b^2} < \frac{1}{2}.$$

Adică,

$$(c+q+\varepsilon^2) \left( \frac{c+\varepsilon^2}{a^2} + \frac{q}{b^2} \right) < \frac{1}{2}.$$

Introducem numărul $p = -c - \varepsilon^2$ şi obţinem că

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\left(-p+\sqrt{|p|q}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(-q-\sqrt{|p|q}\right)^2 \\
&= \frac{1}{a^2}\left[\sqrt{|p|}\left(\sqrt{|p|}+\sqrt{q}\right)\right]^2 + \frac{1}{b^2}\left[\sqrt{q}\left(\sqrt{q}+\sqrt{|p|}\right)\right]^2 \\
&= \left(\sqrt{|p|}+\sqrt{q}\right)^2 \left(\frac{|p|}{a^2}+\frac{q}{b^2}\right) \le 2\,(|p|+q)\left(\frac{|p|}{a^2}+\frac{q}{b^2}\right) \\
&= 2(c+q+\varepsilon^2)\left(\frac{c+\varepsilon^2}{a^2}+\frac{q}{b^2}\right) < 1.
\end{aligned}$$

*Vârfurile*[8] $V_{1,2}$ ale hiperbolei $\mathscr{H}_{pq}$ se găsesc pe dreapta de ecuaţie carteziană

$$x+y+c+p+q = 0.$$

De unde,

$$(y_{V_i}+q)^2 = -pq, \qquad i \in \overline{1,2}.$$

Vârful $V_2$, situat în cadranul $IV_{pq}$, are coordonatele

$$\begin{cases} x_{V_2} = -c-p+\sqrt{|p|q}, \\ y_{V_2} = -q-\sqrt{|p|q}. \end{cases}$$

[8] Vezi [17, pag. 66].

Am obţinut că

$$\frac{(x_{V_2}+c)^2}{a^2}+\frac{y_{V_2}^2}{b^2}=\frac{1}{a^2}\left(-p+\sqrt{|p|q}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(-q-\sqrt{|p|q}\right)^2<1,$$

deci *acest vârf se găseşte în interiorul elipsei*[9].

Justificarea s-a încheiat. $\square$

[9] Vezi secţiunea 3.3.

# Capitolul 3
# Construcţia elipsei folosind raze conjugate

## 3.1 O pereche de raze conjugate

Introducem cercul $\mathscr{C} = \mathscr{C}(C, a)$. Fie $M$ un punct oarecare al elipsei.

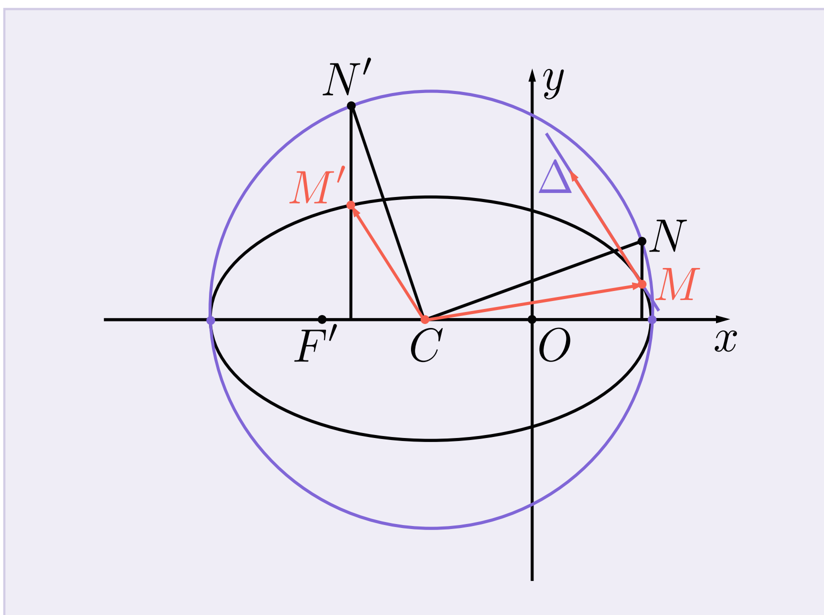


**Fig. 3.1** Razele $\overrightarrow{CM}$ şi $\overrightarrow{CM'}$ sunt conjugate. Dreapta $\Delta$, paralelă cu $CM'$, îi este tangentă elipsei în punctul $M$.

Verticala trecând prin $M$, de ecuaţie carteziană

$$x - x_M = 0,$$

intersectează semicercul superior al cercului $\mathscr{C}$ în punctul $N$. Rotim cu $90°$, *în sens trigonometric*, dreapta $CN$ şi obţinem dreapta $CN'$, cu $N' \in \mathscr{C}$. Verticala prin $N'$ intersectează semi-elipsa superioară în punctul $M'$. Spunem că segmentele $CM, CM'$ — şi, informal, direcţiile $\overline{CM}, \overline{CM'}$ ori vectorii legaţi $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}$ — sunt *raze conjugate* (ale elipsei) [2, pag. 2].

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}\overline{CN} &= \overline{ON} - \overline{OC} = (x_N\bar{i} + y_N\bar{j}) - (x_C\bar{i} + y_C\bar{j}) = (x_M\bar{i} + y_N\bar{j}) - (-c)\bar{i} \\ &= (x_M + c)\cdot\bar{i} + y_N\cdot\bar{j}\end{aligned}$$

şi

$$a^2 = \left|\overline{CN}\right|^2 = (x_M + c)^2 + y_N^2.$$

Cum $x_M \in [-a(1+e), a(1-e)]$, avem $x_M + c \in [-a, a]$, respectiv

$$y_N = \operatorname{sign}(y_M)\cdot\sqrt{a^2 - (x_M + c)^2}.$$

Cerem ca, atunci când nu se suprapun, *punctele M şi N să fie în acelaşi semiplan* în raport cu axele $Ox$, $Oy$.

Conform (2.6),

$$y_M^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot\left[a^2 - (x_M + c)^2\right],$$

deci

$$y_N = \operatorname{sign}(y_M)\cdot\frac{a|y_M|}{b} = \frac{a}{b}\cdot y_M. \tag{3.1}$$

**Lema 3.1.** *Fiind date numerele* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *cu* $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, *vectorii*

$$(\mathscr{P}(\alpha,\beta)) \qquad \begin{cases}\bar{u} = \alpha\cdot\bar{i} + \beta\cdot\bar{j}, \\ \bar{v} = -\beta\cdot\bar{i} + \alpha\cdot\bar{j},\end{cases}$$

*formează o bază ortogonală, pozitiv orientată, a planului* $T\mathbb{R}^2$.

*Demonstraţie.* Observăm că

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0\end{vmatrix} = (\alpha^2 + \beta^2)\cdot\bar{k},$$

respectiv

$$\bar{k}\times\bar{u} = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & 0\end{vmatrix} = \bar{v}. \tag{3.2}$$

Justificarea s-a încheiat. $\square$

Lema 3.1 arată că perechea $\mathscr{P}\left(x_M+c, \frac{ay_M}{b}\right)$,

$$\begin{cases} \overline{CN} = (x_M+c)\cdot\bar{i} + \frac{ay_M}{b}\cdot\bar{j}, \\ \overline{CN'} = -\frac{ay_M}{b}\cdot\bar{i} + (x_M+c)\cdot\bar{j}, \end{cases} \tag{3.3}$$

este pozitiv orientată în $T\mathbb{R}^2$. De asemeni, ca raze ortogonale în cercul $\mathscr{C}$, cele două direcţii verifică relaţia $\overline{CN}\times\overline{CN'} = a^2\cdot\bar{k}$.

La fel ca anterior,

$$\begin{aligned} \overline{ON'} &= \overline{OC}+\overline{CN'} = (-c)\bar{i} + \left[-\frac{ay_M}{b}\bar{i} + (x_M+c)\bar{j}\right] \\ &= -\left(c+\frac{ay_M}{b}\right)\bar{i} + (x_M+c)\bar{j}. \end{aligned}$$

Verticala $N'M'$, de ecuaţie carteziană

$$x - x_{N'} = x + c + \frac{ay_M}{b} = 0,$$

intersectează elipsa în $M'$, de unde

$$1 = \frac{(x_{M'}+c)^2}{a^2} + \frac{y_{M'}^2}{b^2} = \frac{y_M^2}{b^2} + \frac{y_{M'}^2}{b^2},$$

respectiv

$$\frac{y_{M'}^2}{b^2} = 1 - \frac{y_M^2}{b^2} = \frac{(x_M+c)^2}{a^2}$$

şi

$$|y_{M'}| = \frac{b}{a}\cdot|x_M+c|.$$

Cerem ca, atunci când nu se suprapun, *punctele $M'$ şi $N'$ să fie situate în acelaşi semiplan* în raport cu axele $Ox$, $Oy$. Astfel,

$$\operatorname{sign}(y_{M'}) = \operatorname{sign}(y_{N'}) = \operatorname{sign}(x_M+c).$$

Obţinem relaţia

$$y_{M'} = \frac{b}{a}\cdot(x_M+c). \tag{3.4}$$

Via (3.1), (3.4), am ajuns la formulele

$$\begin{cases} \overline{CM} = (x_M+c)\cdot\bar{i} + y_M\cdot\bar{j}, \\ \overline{CM'} = \left(-\frac{ay_M}{b}\right)\cdot\bar{i} + \frac{b}{a}(x_M+c)\cdot\bar{j}. \end{cases} \tag{3.5}$$

**Lema 3.2.** (Invarianţii[1] elipsei) *Au loc relaţiile*[2]

$$\begin{cases} \left|\overline{CM}\right|^2 + \left|\overline{CM'}\right|^2 = a^2 + b^2, \\ \left|\overline{CM} \times \overline{CM'}\right| = ab. \end{cases}$$

*Demonstraţie.* Observăm că

$$\begin{aligned} \left|\overline{CM}\right|^2 + \left|\overline{CM'}\right|^2 &= \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)(x_M + c)^2 + \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) y_M^2 \\ &= (a^2 + b^2) \cdot \left[\frac{(x_M + c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right], \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \overline{CM} \times \overline{CM'} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_M + c & y_M & 0 \\ -\frac{a y_M}{b} & \frac{b}{a}(x_M + c) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_M + c & y_M \\ -\frac{a y_M}{b} & \frac{b}{a}(x_M + c) \end{vmatrix} \cdot \bar{k} \\ &= ab \left[\frac{(x_M + c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right] \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. □

**Lema 3.3.** *Fiind date numerele* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$*, cu* $\alpha_2 \geq 2\alpha_1 > 0$*, există şi sunt unice numerele reale* $a$*,* $b$*, cu* $a \geq b > 0$*, astfel încât*

$$\begin{cases} a \cdot b = \alpha_1, \\ a^2 + b^2 = \alpha_2. \end{cases} \tag{3.6}$$

*Ele au formulele:*

$$a = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\alpha_2 + 2\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2 - 2\alpha_1}\right)$$

*şi*

$$b = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\alpha_2 + 2\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2 - 2\alpha_1}\right).$$

*Demonstraţie.* Observăm că

$$(a + b)^2 = \alpha_2 + 2\alpha_1, \quad (a - b)^2 = \alpha_2 - 2\alpha_1.$$

---

[1] Matricea $\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$, pe care o vom asocia elipsei, admite valorile proprii $\lambda_2 = b^{-2} \geq \lambda_1 = a^{-2} > 0$. Invarianţii matricei, $\lambda_1 + \lambda_2$ şi $\lambda_1 \cdot \lambda_2$, sunt într-o relaţie biunivocă cu numerele $a^2 + b^2$, $ab$. Vezi şi [5, pag. 235].

[2] Prima relaţie apare în [Apollonius, VII.12, 13, 29, 30], conform [7, pag. 228], iar cea de-a doua în [Apollonius, VII.31], după [7, pag. 235]. Vezi şi [5, pag. 280].

Justificarea s-a încheiat. $\square$

Introducem dreapta $\Delta$ care trece prin punctul $M$ al elipsei şi are vectorul director $\overline{CM'}$. Ecuaţia ei se scrie ca

$$\begin{aligned}\overline{OM_\star} &= \overline{OM} + \lambda \cdot \overline{CM'} \\ &= \left(x_M - \frac{\lambda a}{b} \cdot y_M\right) \bar{i} + \left[y_M + \frac{\lambda b}{a} \cdot (x_M + c)\right] \bar{j}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aici, $M_\star$ este un punct oarecare al dreptei.

Ne interesează *intersecţiile* dreptei $\Delta$ cu elipsa. Astfel, presupunând că $M_\star$ se află (şi) pe elipsă, avem

$$\frac{1}{a^2} \cdot \left(x_M - \frac{\lambda a}{b} y_M + c\right)^2 + \frac{1}{b^2} \cdot \left[y_M + \frac{\lambda b}{a}(x_M + c)\right]^2 = 1,$$

respectiv

$$\frac{1}{a^2}\left[\frac{\lambda^2 a^2}{b^2} y_M^2 - 2\frac{\lambda a}{b} y_M (x_M + c)\right] + \frac{1}{b^2}\left[\frac{\lambda^2 b^2}{a^2}(x_M + c)^2 + 2\frac{\lambda b}{a} y_M (x_M + c)\right] = 0.$$

Ajungem la

$$\lambda^2 \cdot \left[\frac{(x_M + c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right] = 0,$$

de unde rezultă că $M$ este singurul punct pe care îl au în comun dreapta şi elipsa. Aşadar, *dreapta care trece prin extremitatea razei $\overrightarrow{CM}$ şi este paralelă cu raza conjugată a acesteia, $\overrightarrow{CM'}$, îi este tangentă elipsei* [3].

## 3.2 Baza reciprocă a bazei $\left\{\overline{CM}, \overline{CM'}\right\}$. Matricea $\alpha$

Introducem vectorii[4]

$$\bar{\mathbf{c}} = \overline{CM}, \quad \bar{d} = \overline{CM'} \tag{3.7}$$

şi[5] — via Lema 3.2 —

---

[3] Conform [Apollonius, I.17, 32] în [7, pag. 22]. În teoria generală a conicelor, această proprietate a razelor conjugate este folosită la definirea lor. Vezi [5, pag. 278, 279] şi comentariul [7, pag. 41]: diametrul unei conice (cu centru) *conjugat* cu o direcţie dată.

[4] Folosesc caracterul **c** pentru a evita confuzia cu semi-distanţa focală $c$.

[5] Vezi [2, pag. 6], [11, Exerciţiul 4.40].

$$\overline{C} = \frac{\left(\overline{d} \times \overline{\mathbf{c}}\right) \times \overline{d}}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2} = \frac{1}{a^2 b^2} \left[ d^2 \overline{\mathbf{c}} - \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) \overline{d} \right], \tag{3.8}$$

respectiv

$$\overline{D} = \frac{\left(\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right) \times \overline{\mathbf{c}}}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2} = \frac{1}{a^2 b^2} \left[ \mathbf{c}^2 \overline{d} - \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) \overline{\mathbf{c}} \right]. \tag{3.9}$$

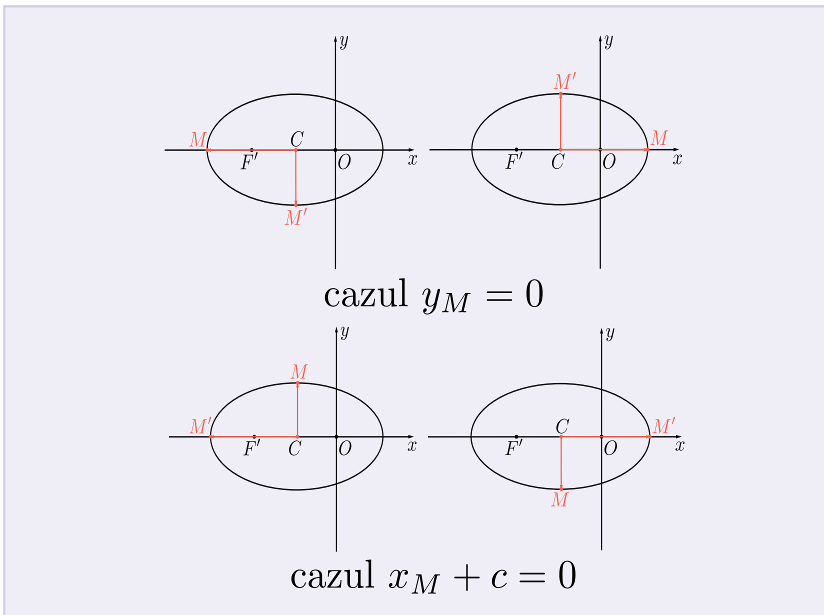


**Fig. 3.2** Razele conjugate $\overrightarrow{CM}$ şi $\overrightarrow{CM'}$ sunt perpendiculare dacă şi numai dacă se suprapun peste axele de simetrie ale elipsei.

Perechea $\{\overline{C}, \overline{D}\}$ este *unica bază* pozitiv orientată a planului $T\mathbb{R}^2$ pentru care

$$\begin{cases} \overline{C} \cdot \overline{\mathbf{c}} = 1, \\ \overline{C} \cdot \overline{d} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{D} \cdot \overline{\mathbf{c}} = 0, \\ \overline{D} \cdot \overline{d} = 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

Ea se numeşte *baza reciprocă* a perechii $\{\overline{\mathbf{c}}, \overline{d}\}$.

Conform (3.5), avem

$$\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d} = \frac{b^2 - a^2}{ab} \cdot y_M (x_M + c). \tag{3.11}$$

Astfel, *razele conjugate* $\{\bar{\mathbf{c}}, \bar{d}\}$ *sunt ortogonale dacă şi numai dacă fie* $y_M = 0$ *fie* $x_M + c = 0$. Vezi şi [5, pag. 282].

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} d^2\bar{\mathbf{c}} - \left(\bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{d}\right)\bar{d} &= \left[\frac{a^2}{b^2}y_M^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_M + c)^2\right] \cdot [(x_M + c)\bar{i} + y_M\bar{j}] \\ \text{(vezi (3.11))} &- \frac{b^2 - a^2}{ab} y_M (x_M + c) \cdot \left[-\frac{a y_M}{b}\bar{i} + \frac{b}{a}(x_M + c)\bar{j}\right]. \end{aligned}$$

*Coeficientul vectorului* $\bar{i}$ este

$$\begin{aligned} &(x_M + c) \cdot \left[\frac{a^2}{b^2}y_M^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_M + c)^2\right] - \frac{b^2 - a^2}{ab} y_M (x_M + c) \cdot \left(-\frac{a y_M}{b}\right) \\ &= \frac{b^2}{a^2}(x_M + c)^3 + y_M^2 (x_M + c) = b^2 (x_M + c) \left[\frac{(x_M + c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right] \\ &= b^2 (x_M + c). \end{aligned}$$

*Coeficientul vectorului* $\bar{j}$ este

$$\begin{aligned} &y_M \cdot \left[\frac{a^2}{b^2}y_M^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_M + c)^2\right] - \frac{b^2 - a^2}{ab} y_M (x_M + c) \cdot \left[\frac{b}{a}(x_M + c)\right] \\ &= \frac{a^2}{b^2}y_M^3 + y_M (x_M + c)^2 = a^2 y_M \left[\frac{(x_M + c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right] \\ &= a^2 y_M. \end{aligned}$$

Aşadar,

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \frac{1}{a^2 b^2}\left[b^2 (x_M + c)\bar{i} + a^2 y_M \bar{j}\right] \\ &= \frac{x_M + c}{a^2} \cdot \bar{i} + \frac{y_M}{b^2} \cdot \bar{j}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^2\bar{d} - \left(\bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{d}\right)\bar{\mathbf{c}} &= [(x_M + c)^2 + y_M^2] \cdot \left[-\frac{a y_M}{b}\bar{i} + \frac{b}{a}(x_M + c)\bar{j}\right] \\ &- \frac{b^2 - a^2}{ab} y_M (x_M + c) \cdot [(x_M + c)\bar{i} + y_M\bar{j}]. \end{aligned}$$

*Coeficientul vectorului* $\bar{i}$ este

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{a}{b}y_M\right) \cdot \left[(x_M + c)^2 + y_M^2\right] - \frac{b^2 - a^2}{ab} y_M \cdot (x_M + c)^2 \\ &= -\frac{a}{b}y_M^3 - \frac{b}{a}y_M (x_M + c)^2 = -ab y_M \left[\frac{(x_M + c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right] \end{aligned}$$

$$= -aby_M.$$

*Coeficientul vectorului* $\overline{j}$ este

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{a}(x_M+c)\cdot\left[(x_M+c)^2+y_M^2\right]-\frac{b^2-a^2}{ab}\cdot y_M^2(x_M+c)\\
&=ab(x_M+c)\left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}\right]\\
&=ab(x_M+c).
\end{aligned}$$

Aşadar,

$$\begin{aligned}
\overline{D}&=\frac{1}{a^2b^2}\left[-aby_M\overline{i}+ab(x_M+c)\overline{j}\right]\\
&=-\frac{y_M}{ab}\cdot\overline{i}+\frac{x_M+c}{ab}\cdot\overline{j}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Introducem matricea $\alpha\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ cu formula [2, pag. 7, 12]

$$\alpha=\overline{C}\otimes\overline{C}+\overline{D}\otimes\overline{D}. \tag{3.14}$$

Ştim că matricea[6] $\alpha$ este simetrică, inversabilă, (strict) pozitiv definită. Inversa ei este matricea

$$\alpha^{-1}=\overline{\mathbf{c}}\otimes\overline{\mathbf{c}}+\overline{d}\otimes\overline{d}.$$

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}
\alpha&\equiv\begin{pmatrix}\frac{x_M+c}{a^2}\\ \\ \frac{y_M}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x_M+c}{a^2} & \frac{y_M}{b^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{y_M}{ab}\\ \\ \frac{x_M+c}{ab}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{y_M}{ab} & \frac{x_M+c}{ab}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{(x_M+c)^2}{a^4} & \frac{y_M(x_M+c)}{a^2b^2}\\ \\ \frac{y_M(x_M+c)}{a^2b^2} & \frac{y_M^2}{b^4}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{y_M^2}{a^2b^2} & -\frac{y_M(x_M+c)}{a^2b^2}\\ \\ -\frac{y_M(x_M+c)}{a^2b^2} & \frac{(x_M+c)^2}{a^2b^2}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Fie $P$ un punct oarecare de pe elipsă. Atunci, conform (3.5),

$$\overline{CP}\cdot\alpha\overline{CP}\equiv\begin{pmatrix}x_P+c & y_P\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_P+c\\ y_P\end{pmatrix}$$

[6] Vezi [11, Exerciţiul 4.49].

$$= \left( \tfrac{x_P+c}{a^2} \;\; \tfrac{y_P}{b^2} \right) \begin{pmatrix} x_P + c \\ y_P \end{pmatrix} = \frac{(x_P+c)^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2}$$
$$= 1. \tag{3.16}$$

## 3.3 Caracterizarea elipsei în baza $\{\overline{CM}, \overline{CM'}\}$. Puncte exterioare elipsei

Fie $M$ un punct oarecare, fixat, al elipsei şi baza planului $T\mathbb{R}^2$ formată cu vectorii $\{\overline{\mathbf{c}}, \overline{d}\}$ din (3.7).

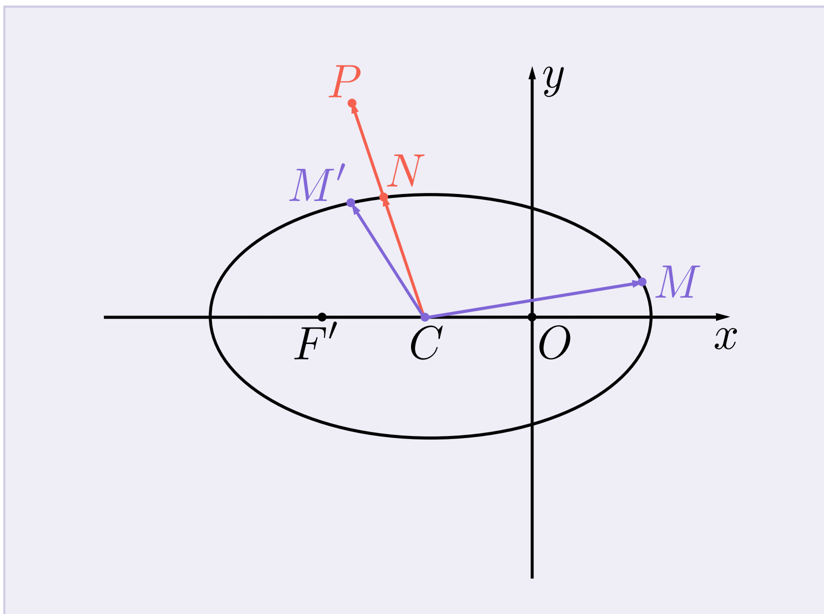


**Fig. 3.3** Punctul $P$, unde $\overline{CP} = m \cdot \overline{CM} + n \cdot \overline{CM'}$, este în exteriorul elipsei dacă şi numai dacă $m^2 + n^2 > 1$.

**Lema 3.4.** *Fie $P \in E_2$ şi numerele $m, n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că*

$$\overline{CP} = m \cdot \overline{\mathbf{c}} + n \cdot \overline{d}. \tag{3.17}$$

*Atunci, punctul $P$ se găseşte pe elipsă dacă şi numai dacă*[7]

$$m^2 + n^2 = 1. \tag{3.18}$$

[7] Numerele $(1-m)\mathbf{c}$, $nd$ reprezintă *abscisa* şi *ordonata* lui $P$ în calculele lui Apollonius, vezi [7, pag. clxi, clxii].

*Demonstraţie.* Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}\overline{CP} &= m\left[(x_M+c)\bar{i}+y_M\bar{j}\right]+n\left[-\frac{ay_M}{b}\bar{i}+\frac{b}{a}(x_M+c)\bar{j}\right]\\ &= \left[m(x_M+c)-\frac{nay_M}{b}\right]\cdot\bar{i}+\left[my_M+\frac{nb}{a}(x_M+c)\right]\cdot\bar{j},\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OC}+\overline{CP}\\ &= \left[m(x_M+c)-\frac{nay_M}{b}-c\right]\cdot\bar{i}+\left[my_M+\frac{nb}{a}(x_M+c)\right]\cdot\bar{j}\end{aligned} \tag{3.19}$$

şi

$$\begin{aligned}\frac{(x_P+c)^2}{a^2}+\frac{y_P^2}{b^2} &= \frac{1}{a^2}\left[m(x_M+c)-\frac{nay_M}{b}\right]^2+\frac{1}{b^2}\left[my_M+\frac{nb}{a}(x_M+c)\right]^2\\ &= (m^2+n^2)\left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}\right]\\ &= m^2+n^2.\end{aligned}$$

Observăm că următorul sistem algebric liniar — în necunoscutele $m$ şi $n$, construit via (3.19) —

$$\begin{cases}(x_M+c)\cdot m+\left(-\frac{ay_M}{b}\right)\cdot n = x_P+c,\\ y_M\cdot m+\frac{b}{a}(x_M+c)\cdot m = y_P\end{cases}$$

este cramerian, determinantul său fiind dat de relaţiile

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}x_M+c & -\frac{ay_M}{b}\\ y_M & \frac{b}{a}(x_M+c)\end{vmatrix} &= ab\left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}\right]\\ &= ab.\end{aligned}$$

Aşadar, *orice punct $P=P(x_P,y_P)$ din planul elipsei este reprezentat în mod unic de perechea $\{m,n\}$.*

Justificarea s-a încheiat. □

Mai departe,

$$\begin{aligned}\overline{CP}\cdot\alpha\overline{CP} &= (m\bar{\mathbf{c}}+n\bar{d})\cdot\left(\overline{C}\otimes\overline{C}+\overline{D}\otimes\overline{D}\right)(m\bar{\mathbf{c}}+n\bar{d})\\ &= (m\bar{\mathbf{c}}+n\bar{d})\cdot\left\{\left[\overline{C}\cdot(m\bar{\mathbf{c}}+n\bar{d})\right]\overline{C}+\left[\overline{D}\cdot(m\bar{\mathbf{c}}+n\bar{d})\right]\overline{D}\right\}\\ &= (m\bar{\mathbf{c}}+n\bar{d})\cdot(m\overline{C}+n\overline{D}) = m^2(\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{C})+n^2(\bar{d}\cdot\overline{D})\\ &= m^2+n^2.\end{aligned}$$

Lema 3.4 ne arată că *punctul $P$ se găseşte pe elipsă dacă şi numai dacă are loc (3.16)*.

Pentru punctul $P$, din planul elipsei, introducem numărul[8] $R > 0$ astfel încât

$$\overline{CP} \cdot \alpha \overline{CP} = R^2$$

şi punctul $N \in (CP$ cu

$$\overline{CN} = \frac{1}{R} \cdot \overline{CP}.$$

Observăm că *$N$ este punctul de intersecţie* dintre semidreapta $(CP$ şi elipsă. Aşadar, *punctul $P$ se găseşte în exteriorul elipsei dacă şi numai dacă $N$ este situat între $C$ şi $P$*, adică $R > 1$.

## 3.4 Construcţia elipsei

Fie $C \in E_2$ un punct oarecare, fixat, şi $\mathscr{P} = \{\bar{\mathbf{c}}, \bar{d}\}$ o bază pozitiv orientată a planului $T\mathbb{R}^2$.

Introducem punctele $M, M' \in E_2$ pentru care

$$\overrightarrow{CM} \in \bar{\mathbf{c}}, \quad \overrightarrow{CM'} \in \bar{d}$$

şi numerele $T, U, V, W \in \mathbb{R}$ cu expresiile

$$T = \left|\overline{CM}\right|, \quad U = \left|\overline{CM'}\right|, \quad V = (\overline{CM}, \overline{CM'}, \bar{k}), \quad W = \overline{CM} \cdot \overline{CM'}.$$

Astfel, avem următoarele restricţii privind aceste numere:

$$\begin{cases} T, U, V > 0, \\ T^2 \cdot U^2 = V^2 + W^2. \end{cases} \tag{3.20}$$

Orientarea bazei $\mathscr{P}$ implică *pozitivitatea* lui $V$, acest număr fiind proiecţia vectorului $\overline{CM} \times \overline{CM'}$ pe direcţia $\bar{k}$. Identitatea lui Lagrange,

$$\left|\overline{CM} \times \overline{CM'}\right|^2 = \left|\overline{CM}\right|^2 \cdot \left|\overline{CM'}\right|^2 - \left(\overline{CM} \cdot \overline{CM'}\right)^2,$$

produce *egalitatea* din (3.20).

**Pasul 1.** Introducem numerele $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a \geq b > 0$, pentru care

$$\begin{cases} a \cdot b = V, \\ a^2 + b^2 = T^2 + U^2. \end{cases}$$

Formulele de calcul ale acestor numere sunt date de Lema 3.3.

---

[8] Matricea $\alpha$ este (strict) pozitiv definită.

**Lema 3.5.** *Au loc relaţiile*

$$b \le T, U \le a. \tag{3.21}$$

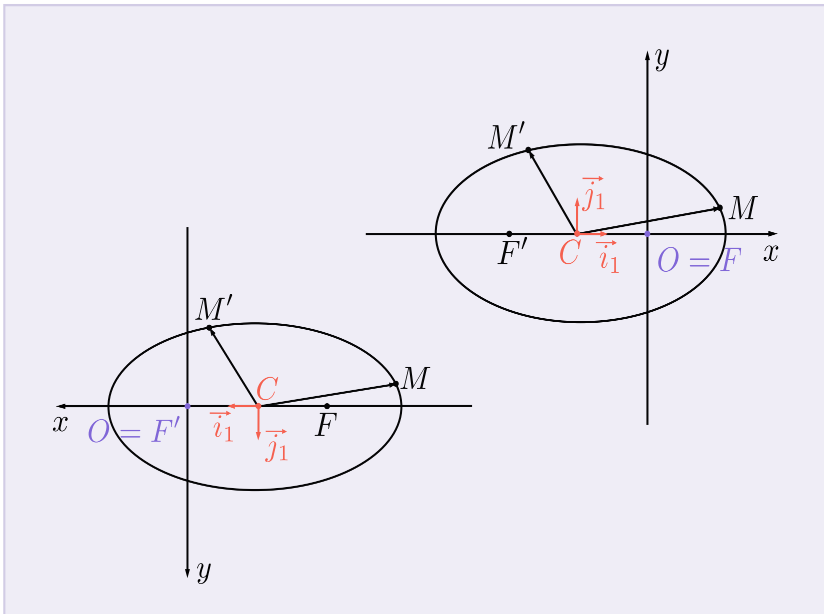


**Fig. 3.4** La reconstituirea unei elipse, căreia îi cunoaştem razele conjugate $\overrightarrow{CM}$ şi $\overrightarrow{CM'}$, nu vom putea recupera opţiunea iniţială privind alegerea unuia dintre focare drept origine a axelor de coordonate.

*Demonstraţie.* Egalitatea din (3.20) ne permite să introducem unghiul[9] $\varphi \in (0, \pi)$ astfel încât

$$V = TU \sin\varphi, \quad W = TU \cos\varphi.$$

În contextul Lemei 3.3,

$$\alpha_1 = V, \quad \alpha_2 = T^2 + U^2.$$

Observăm că

$$2a^2 = \alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1^2},$$

respectiv

[9] Acesta este unghiul dintre direcţiile $\overline{CM}$ şi $\overline{CM'}$.

$$\alpha_2^2 - 4\alpha_1^2 = \left(T^2+U^2\right)^2 - 4T^2U^2\sin^2\varphi \qquad (3.22)$$
$$= \left(T^2-U^2\right)^2 + 4T^2U^2\cos^2\varphi$$

şi

$$\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2-4\alpha_1^2} \geq T^2+U^2+\left|T^2-U^2\right| = 2\max\left\{T^2,U^2\right\}.$$

Aşadar, $T, U \leq a$.
Mai departe, să presupunem că

$$U = \min\{T,U\} < b.$$

Introducem numărul $\varepsilon \in (0,1)$ cu $U = \varepsilon b$ şi remarcăm că

$$T = \frac{V}{U\sin\varphi} \geq \frac{V}{U} = \frac{a}{\varepsilon} > a,$$

ceea ce contrazice prima parte a demonstraţiei.
Justificarea s-a încheiat. $\square$

**Pasul 2.** Introducem numărul $c \geq 0$ cu $c^2 = a^2 - b^2$.
**Pasul 3.** Vom construi *formule* privind numerele (încă necunoscute) $x$, $y$, $z$, $w \in \mathbb{R}$ şi versorii ortogonali (încă necunoscuţi) $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$ astfel încât

$$\begin{cases} \overline{CM} = x\cdot\bar{i}_1 + y\cdot\bar{j}_1, \\ \overline{CM'} = z\cdot\bar{i}_1 + w\cdot\bar{j}_1. \end{cases}$$

**Lema 3.6.** *În contextul restricţiilor (3.20), să presupunem că există numerele $w, z \in \mathbb{R}$ cu*

$$z^2+w^2 = U^2.$$

*Atunci, numerele reale $x$, $y$, cu formulele*

$$x = \frac{Vw+Wz}{U^2}, \quad y = \frac{Ww-Vz}{U^2},$$

*verifică ecuaţiile*

$$\begin{cases} x^2+y^2 = T^2, \\ xw-yz = V, \\ xz+yw = W. \end{cases}$$

*Demonstraţie.* Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{1}{U^4}\left[(V^2+W^2)w^2+(W^2+V^2)z^2\right] = (V^2+W^2)\frac{w^2+z^2}{U^4} = \frac{V^2+W^2}{U^2} \\ &= T^2, \end{aligned}$$

respectiv

$$xw-yz = \frac{1}{U^2}(Vw^2+Vz^2) = V\frac{w^2+z^2}{U^2} = V$$

şi

$$xz+yw = \frac{1}{U^2}(Wz^2+Ww^2) = W\frac{z^2+w^2}{U^2} = W.$$

Justificarea s-a încheiat. □

**Lema 3.7.** *În contextul restricţiilor (3.20), să presupunem că există numerele* $x, y \in \mathbb{R}$ *cu*

$$x^2+y^2 = T^2.$$

*Atunci, numerele reale* $z, w$, *cu formulele*

$$z = \frac{Wx-Vy}{T^2}, \quad w = \frac{Vx+Wy}{T^2},$$

*verifică ecuaţiile*

$$\begin{cases} z^2+w^2 = U^2, \\ xw-yz = V, \\ xz+yw = W. \end{cases}$$

*Demonstraţie.* Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} z^2+w^2 &= \frac{1}{T^4}\left[(W^2+V^2)x^2+(V^2+W^2)y^2\right] = (V^2+W^2)\frac{x^2+y^2}{T^4} = \frac{V^2+W^2}{T^2} \\ &= U^2, \end{aligned}$$

respectiv

$$xw-yz = \frac{1}{T^2}(Vx^2+Vy^2) = V\frac{x^2+y^2}{T^2} = V$$

şi

$$xz+yw = \frac{1}{T^2}(Wx^2+Wy^2) = W\frac{x^2+y^2}{T^2} = W.$$

Justificarea s-a încheiat. □

**Lema 3.8.** *În contextul restricţiilor (3.20), să presupunem că am fixat numerele reale x, y, z, w care să verifice* (simultan) *concluziile Lemelor 3.6, 3.7. Atunci, perechea de vectori* $\mathscr{P}_1 = \{\bar{i}_1, \bar{j}_1\}$*, cu formulele*

$$\begin{cases} \bar{i}_1 = \frac{w}{V} \cdot \overline{CM} - \frac{y}{V} \cdot \overline{CM'}, \\ \bar{j}_1 = -\frac{z}{V} \cdot \overline{CM} + \frac{x}{V} \cdot \overline{CM'}, \end{cases}$$

*îndeplineşte condiţiile*

$$|\bar{i}_1| = |\bar{j}_1| = 1, \quad \bar{i}_1 \cdot \bar{j}_1 = 0, \quad \bar{i}_1 \times \bar{j}_1 = \frac{\overline{CM} \times \overline{CM'}}{V}.$$

*Demonstraţie.* Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} |\bar{i}_1|^2 &= \frac{w^2}{V^2} |\overline{CM}|^2 + \frac{y^2}{V^2} |\overline{CM'}|^2 - 2\frac{wy}{V^2} \left(\overline{CM} \cdot \overline{CM'}\right) \\ &= \frac{w^2}{V^2} T^2 + \frac{y^2}{V^2} U^2 - 2\frac{Vxy + Wy^2}{V^2T^2} W \\ &= \frac{1}{V^2} \left[ w^2T^2 + y^2U^2 - 2\frac{VWxy + W^2y^2}{T^2} \right] \\ &= \frac{1}{V^2} \left[ \frac{(Vx + Wy)^2}{T^2} + y^2U^2 - 2\frac{VWxy + W^2y^2}{T^2} \right] \\ &= \frac{1}{V^2T^2} \left[ (Vx + Wy)^2 + y^2(TU)^2 - 2(VWxy + W^2y^2) \right] \\ &= \frac{1}{V^2T^2} \left[ (Vx + Wy)^2 + y^2(V^2 + W^2) - 2(VWxy + W^2y^2) \right] \\ &= \frac{V^2x^2 + y^2V^2}{V^2T^2} = \frac{x^2 + y^2}{T^2} = 1, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} |\bar{j}_1|^2 &= \frac{z^2}{V^2} |\overline{CM}|^2 + \frac{x^2}{V^2} |\overline{CM'}|^2 - 2\frac{zx}{V^2} \left(\overline{CM} \cdot \overline{CM'}\right) \\ &= \frac{z^2}{V^2} T^2 + \frac{x^2}{V^2} U^2 - 2\frac{Wx^2 - Vxy}{V^2T^2} W \\ &= \frac{1}{V^2} \left[ z^2T^2 + x^2U^2 - 2\frac{W^2x^2 - VWxy}{T^2} \right] \\ &= \frac{1}{V^2} \left[ \frac{(Wx - Vy)^2}{T^2} + x^2U^2 - 2\frac{W^2x^2 - VWxy}{T^2} \right] \\ &= \frac{1}{V^2T^2} \left[ (Wx - Vy)^2 + x^2(TU)^2 - 2(W^2x^2 - VWxy) \right] \\ &= \frac{1}{V^2T^2} \left[ (Wx - Vy)^2 + x^2(V^2 + W^2) - 2(W^2x^2 - VWxy) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{V^2x^2 + y^2V^2}{V^2T^2} = \frac{x^2+y^2}{T^2} = 1.$$

Mai departe,

$$\begin{aligned}
&\bar{i}_1 \cdot \bar{j}_1 \\
&= -\frac{wz}{V^2}\left|\overline{CM}\right|^2 - \frac{yx}{V^2}\left|\overline{CM'}\right|^2 + \frac{wx+zy}{V^2}\left(\overline{CM}\cdot\overline{CM'}\right) \\
&= -\frac{wz}{V^2}T^2 - \frac{yx}{V^2}U^2 + \frac{wx+zy}{V^2}W = -\frac{wzT^2+yxU^2}{V^2} + \frac{W}{V^2}(wx+zy) \\
&= -\frac{1}{V^2}\left[\frac{(Vx+Wy)(Wx-Vy)}{T^2} + U^2xy\right] + \frac{W}{V^2}\left(\frac{Vx^2+Wxy}{T^2} + \frac{Wxy-Vy^2}{T^2}\right) \\
&= -\frac{1}{V^2T^2}\left[(Vx+Wy)(Wx-Vy) + (UT)^2xy\right] + \frac{W}{V^2T^2}(Vx^2+2Wxy-Vy^2) \\
&= -\frac{1}{V^2T^2}\left[(Vx+Wy)(Wx-Vy) + (V^2+W^2)xy\right] + \frac{W}{V^2T^2}(Vx^2+2Wxy-Vy^2) \\
&= -\frac{1}{V^2T^2}(VWx^2 - VWy^2 + 2W^2xy) + \frac{W}{V^2T^2}(Vx^2+2Wxy-Vy^2) \\
&= -\frac{W}{V^2T^2}(Vx^2 - Vy^2 + 2Wxy) + \frac{W}{V^2T^2}(Vx^2+2Wxy-Vy^2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

În sfârşit,

$$\bar{i}_1 \times \bar{j}_1 = \frac{wx-yz}{V^2}\left(\overline{CM}\times\overline{CM'}\right) = \frac{\overline{CM}\times\overline{CM'}}{V}.$$

Justificarea s-a încheiat. $\square$

**Pasul 4.** Ne interesează doar cazul $a \neq b$. Vom introduce numerele $x_M, y_M \in \mathbb{R}$ care să verifice următoarele ecuaţii

$$\begin{cases} (x_M+c)^2 + y_M^2 = T^2, \\ \frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1, \\ \frac{b^2}{a^2}(x_M+c)^2 + \frac{a^2}{b^2}y_M^2 = U^2, \\ \frac{b^2-a^2}{ab}y_M(x_M+c) = W. \end{cases} \tag{3.23}$$

Începem cu observaţia că sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} X+Y = T^2, \\ \frac{X}{a^2} + \frac{Y}{b^2} = 1, \end{cases} \tag{3.24}$$

este cramerian şi are soluţia

$$X = \frac{a^2(T^2-b^2)}{a^2-b^2}, \quad Y = \frac{b^2(a^2-T^2)}{a^2-b^2}.$$

De asemeni, conform Lemei 3.5, *numerele* $X, Y$ *sunt nenegative*.

La rândul său, sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} \frac{b^2}{a^2}X + \frac{a^2}{b^2}Y = U^2, \\ \frac{X}{a^2} + \frac{Y}{b^2} = 1, \end{cases} \tag{3.25}$$

este cramerian şi are soluţia *nenegativă*

$$X = \frac{a^2(a^2-U^2)}{a^2-b^2}, \quad Y = \frac{b^2(U^2-b^2)}{a^2-b^2}.$$

Egalitatea $a^2+b^2 = T^2+U^2$ ne permite să remarcăm că *sistemele de ecuaţii (3.24), (3.25) au aceeaşi soluţie*.

Fixăm numerele $x_M, y_M \in \mathbb{R}$ pentru care

$$\begin{cases} (x_M+c)^2 = \frac{a^2(T^2-b^2)}{a^2-b^2}, \\ y_M^2 = \frac{b^2(a^2-T^2)}{a^2-b^2}, \\ \text{sign}\,(y_M \cdot (x_M+c)) = -\text{sign}(W). \end{cases} \tag{3.26}$$

Astfel, perechea $\{X, Y\}$, cu $X = (x_M+c)^2$ şi $Y = y_M^2$, este *unica soluţie* a sistemelor de ecuaţii (3.24), (3.25).

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} T^2 \cdot U^2 &= [(x_M+c)^2 + y_M^2] \cdot \left[\frac{a^2}{b^2}y_M^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_M+c)^2\right] \\ &= \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) y_M^2 (x_M+c)^2 + a^2b^2 \left[\frac{(x_M+c)^4}{a^4} + \frac{y_M^4}{b^4}\right] \\ &= \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2\right) y_M^2 (x_M+c)^2 + a^2b^2 \left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right]^2 \\ &= \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} y_M^2 (x_M+c)^2 + a^2b^2 \left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{a^2-b^2}{ab} y_M (x_M+c)\right]^2 + a^2b^2 \left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{a^2-b^2}{ab} y_M (x_M+c)\right]^2 + (ab)^2 \cdot \left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{a^2-b^2}{ab} y_M (x_M+c)\right]^2 + V^2, \end{aligned}$$

de unde — via (3.20) —

$$|W| = \sqrt{T^2U^2 - V^2} = \frac{a^2 - b^2}{ab} \cdot |y_M(x_M + c)|\,.$$

Conform celei de-a treia dintre restricţiile (3.26), avem

$$W = \frac{b^2 - a^2}{ab} \cdot y_M(x_M + c).$$

**Pasul 5:** alegerea numerelor $x$, $y$, $z$, $w$. Introducem numerele

$$x = x_M + c, \quad y = y_M. \tag{3.27}$$

Au loc egalităţile

$$\begin{aligned} z = \frac{Wx - Vy}{T^2} &= \frac{\frac{b^2 - a^2}{ab} y_M(x_M + c)^2 - aby_M}{(x_M + c)^2 + y_M^2} \\ &= \frac{y_M}{ab} \cdot \frac{(b^2 - a^2)(x_M + c)^2 - a^2b^2}{(x_M + c)^2 + y_M^2}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Cum

$$\frac{(x_M + c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1,$$

avem

$$y_M^2 = b^2 \left[1 - \frac{(x_M + c)^2}{a^2}\right]$$

şi

$$\begin{aligned} (x_M + c)^2 + y_M^2 &= (x_M + c)^2 + b^2 \left[1 - \frac{(x_M + c)^2}{a^2}\right] = (x_M + c)^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + b^2 \\ &= -\frac{1}{a^2}\left[(b^2 - a^2)(x_M + c)^2 - a^2b^2\right]. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Din (3.28), (3.29), obţinem

$$z = -\frac{ay_M}{b}. \tag{3.30}$$

La fel,

$$w = \frac{Vx + Wy}{T^2} = \frac{ab(x_M + c) + \frac{b^2 - a^2}{ab} y_M^2(x_M + c)}{(x_M + c)^2 + y_M^2}$$

$$= \frac{x_M + c}{ab} \cdot \frac{a^2b^2 + (b^2 - a^2)y_M^2}{a^2\left(1 - \frac{y_M^2}{b^2}\right) + y_M^2} = \frac{x_M + c}{ab} \cdot \frac{a^2b^2 + (b^2 - a^2)y_M^2}{a^2(b^2 - y_M^2) + b^2y_M^2} b^2$$

$$= \frac{b}{a}(x_M + c) \cdot \frac{a^2b^2 + (b^2 - a^2)y_M^2}{a^2b^2 + (b^2 - a^2)y_M^2}$$

$$= \frac{b}{a}(x_M + c). \tag{3.31}$$

Pe baza relaţiilor (3.27), (3.30), (3.31), ajungem la

$$\begin{cases} \overline{CM} = (x_M + c) \cdot \bar{i}_1 + y_M \cdot \bar{j}_1, \\ \overline{CM'} = -\frac{ay_M}{b} \cdot \bar{i}_1 + \frac{b}{a}(x_M + c) \cdot \bar{j}_1, \end{cases}$$

adică la corespondentele expresiilor (3.5).

Formulele de calcul ale versorilor $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$ sunt date de Lema 3.8. Introducem versorii

$$\overrightarrow{i}_1 \in T_C\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{i}_1 \in \bar{i}_1, \qquad \overrightarrow{j}_1 \in T_C\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{j}_1 \in \bar{j}_1.$$

Dreptele $\Delta_1(C, \overrightarrow{i}_1)$ — trecând prin punctul $C$ şi având vectorul director $\bar{i}_1$ — şi $\Delta_2(C, \overrightarrow{j}_1)$ sunt axele de simetrie ale elipsei. Focarele $F = O$ şi $F'$ se găsesc pe $\Delta_1$, de o parte şi de cealaltă a centrului de simetrie $C$, la distanţa $c$ (de acesta). Focarul $O$ este extremitatea vectorului

$$\overrightarrow{CO} = c \cdot \overrightarrow{i}_1 \in T_C\mathbb{R}^2.$$

Axa de coordonate $Ox$ este chiar dreapta $\Delta_1$. Axa de coordonate $Oy$ este dreapta trecând prin $O$ şi având vectorul director $\bar{j}_1$.

Construcţia elipsei, plecând de la o pereche de raze conjugate[10] ale ei, s-a încheiat. Trebuie făcută observaţia următoare: dacă vectorii $\bar{\mathbf{c}}$ şi $\bar{d}$ de la începutul secţiunii reprezintă, în locul unei baze oarecare a planului $T\mathbb{R}^2$, direcţiile unei perechi de raze conjugate ale unei elipse pe care dorim să o *reconstituim*, atunci nu vom putea recupera opţiunea *iniţială* privind originea $O$ a axelor de coordonate: $F$ sau $F'$. Aceasta pentru că numerele $x_M$, $y_M$ care verifică ecuaţiile (3.23) şi (3.26) nu sunt unice! Mai precis, avem două perechi de numere, cu care construim soluţiile

$$\{x_M + c, y_M\}, \qquad \{-(x_M + c), -y_M\}.$$

Evident, această opţiune nu afectează *desenul* elipsei.

## 3.5 Verificarea formulelor din Lema 3.8

În contextul expresiilor (3.5), au loc relaţiile

[10] Vezi [Apollonius, I.56, 57, 58] în [7, pag. 48 şi urm.], [3, pag. 203].

$$\begin{aligned}
\bar{i}_1 &= \frac{w}{V}\overline{CM} - \frac{y}{V}\overline{CM'}\\
&= \frac{\frac{b}{a}(x_M+c)}{ab}\cdot\left[(x_M+c)\bar{i} + y_M\bar{j}\right] - \frac{y_M}{ab}\cdot\left[-\frac{ay_M}{b}\bar{i} + \frac{b}{a}(x_M+c)\bar{j}\right]\\
&= \left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2}\bar{i} + \frac{y_M(x_M+c)}{a^2}\bar{j}\right] + \left[\frac{y_M^2}{b^2}\bar{i} - \frac{y_M(x_M+c)}{a^2}\bar{j}\right]\\
&= \left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right]\cdot\bar{i} = \bar{i}
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
\bar{j}_1 &= -\frac{z}{V}\overline{CM} + \frac{x}{V}\overline{CM'}\\
&= \frac{\frac{ay_M}{b}}{ab}\cdot\left[(x_M+c)\bar{i} + y_M\bar{j}\right] + \frac{x_M+c}{ab}\cdot\left[-\frac{ay_M}{b}\bar{i} + \frac{b}{a}(x_M+c)\bar{j}\right]\\
&= \left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right]\cdot\bar{j} = \bar{j}.
\end{aligned}$$

Formulele din Lema 3.8 au fost extrase din sistemul algebric liniar

$$\left(\bar{i}_1\ \bar{j}_1\right)\cdot\mathbb{T} = \left(\overline{CM}\ \overline{CM'}\right),$$

adică

$$\left(\bar{i}_1\ \bar{j}_1\right) = \left(\overline{CM}\ \overline{CM'}\right)\cdot\mathbb{T}^{-1},$$

unde

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} x & z\\ y & w\end{pmatrix}, \qquad \mathbb{T}^{-1} = \frac{1}{V}\cdot\begin{pmatrix} w & -z\\ -y & x\end{pmatrix}.$$

# Capitolul 4
# Construcţia elipsei folosind matricea $\alpha$

## 4.1 Valori şi vectori proprii

Fie $\mathscr{P} = \{\overline{\mathbf{c}}, \overline{d}\}$ o bază pozitiv orientată a planului $T\mathbb{R}^2$, $\mathscr{P}^\star = \{\overline{C}, \overline{D}\}$ baza sa reciprocă şi matricea

$$\alpha = \overline{C} \otimes \overline{C} + \overline{D} \otimes \overline{D} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Ne interesează găsirea (eventuală) a numerelor $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care există direcţii (nenule) $\overline{u} \in T\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$\alpha\overline{u} = \lambda\overline{u}. \tag{4.1}$$

Introducem numerele $m, n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overline{u} = m \cdot \overline{\mathbf{c}} + n \cdot \overline{d}.$$

Ecuaţia (4.1) se rescrie ca

$$m\overline{C} + n\overline{D} = (\lambda m)\overline{\mathbf{c}} + (\lambda n)\overline{d},$$

respectiv ca

$$\begin{aligned}(\lambda m)\overline{\mathbf{c}} + (\lambda n)\overline{d} &= \frac{1}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2}\left\{m\left[d^2\overline{\mathbf{c}} - (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d})\overline{d}\right] + n\left[\mathbf{c}^2\overline{d} - (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d})\overline{\mathbf{c}}\right]\right\} \\ &= \frac{md^2 - n(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d})}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2}\overline{\mathbf{c}} + \frac{-m(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}) + n\overline{\mathbf{c}}}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2}\overline{d}.\end{aligned}$$

Obţinem sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}-\lambda\right)\cdot m+\frac{-(\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\cdot n=0, \\ \frac{-(\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\cdot m+\left(\frac{\mathbf{c}^2}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}-\lambda\right)\cdot n=0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Determinantul sistemului este dat de relaţia

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \frac{d^2}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}-\lambda & \frac{-(\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2} \\ \frac{-(\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2} & \frac{\mathbf{c}^2}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^4}\left[\left(d^2-\lambda\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2\right)\left(\mathbf{c}^2-\lambda\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2\right)-\left(\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

*Valorile proprii* $\lambda$ sunt, aşadar, soluţiile ecuaţiei algebrice

$$\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^4\cdot\lambda^2-\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2\left(\mathbf{c}^2+d^2\right)\cdot\lambda+\left[d^2\mathbf{c}^2-\left(\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\right)^2\right]=0,$$

pe care o rescriem ca

$$\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2\cdot\lambda^2-\left(\mathbf{c}^2+d^2\right)\cdot\lambda+1=0. \tag{4.3}$$

Discriminantul ecuaţiei (4.3) este nenegativ, căci

$$\Delta_\lambda=\left(\mathbf{c}^2+d^2\right)^2-4\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2\geq\left(\mathbf{c}^2+d^2\right)^2-4\mathbf{c}^2d^2=\left(\mathbf{c}^2-d^2\right)^2.$$

Atunci, valorile proprii $\lambda_{1,2}$, cu $\lambda_1\leq\lambda_2$, ale matricei $\alpha$ sunt *numere pozitive*, care pot fi exprimate folosind *invarianţii elipsei* — vezi Lema 3.2 —

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\left[\mathbf{c}^2+d^2\pm\sqrt{(\mathbf{c}^2+d^2)^2-4\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\right].$$

Introducând aceste valori în prima dintre ecuaţiile (4.2), obţinem formulele *vectorilor proprii* $\overline{u}$. Astfel, *presupunând că* $\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\neq 0$, un vector propriu corespunzând valorii proprii $\lambda_1$ este dat de expresiile

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &= \frac{\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\cdot\bar{\mathbf{c}}+\left(\frac{d^2}{\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}-\lambda_1\right)\cdot\overline{d} \\ &= \frac{1}{2\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\left\{2\left(\bar{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\right)\bar{\mathbf{c}}+\left[d^2-\mathbf{c}^2+\sqrt{(\mathbf{c}^2+d^2)^2-4\left|\bar{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\right]\overline{d}\right\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

iar un vector propriu corespunzând valorii proprii $\lambda_2$ este dat de expresiile

$$\begin{aligned}
\overline{u}_2 &= \frac{\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}}{\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\cdot\overline{\mathbf{c}}+\left(\frac{d^2}{\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}-\lambda_2\right)\cdot\overline{d}\\
&= \frac{1}{2\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\left\{2\left(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\right)\overline{\mathbf{c}}+\left[d^2-\mathbf{c}^2-\sqrt{(\mathbf{c}^2+d^2)^2-4\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\right]\overline{d}\right\}. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Observăm că — vezi (3.22) —

$$\Delta_\lambda = \left(\mathbf{c}^2-d^2\right)^2+4\left(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\right)^2.$$

Astfel, *vectorii* $\overline{u}_{1,2}$ *sunt (simultan) nuli*[1] dacă şi numai dacă

$$\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}=0, \qquad \mathbf{c}=d. \quad (4.6)$$

Aici, elipsa devine cerc.

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}
\overline{u}_1\cdot\overline{u}_2 &= \frac{1}{4\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^4}\Big\{4(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})^2\mathbf{c}^2+2(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})^2(d^2-\mathbf{c}^2-\sqrt{\Delta_\lambda})\\
&+ 2(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})^2(d^2-\mathbf{c}^2+\sqrt{\Delta_\lambda})\\
&+ \left\{(d^2-\mathbf{c}^2)^2-\left[(\mathbf{c}^2+d^2)^2-4\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2\right]\right\}d^2\Big\}\\
&= \frac{1}{4\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^4}\Big\{4(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})^2\mathbf{c}^2+4(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})^2(d^2-\mathbf{c}^2)\\
&+ \left[-4\mathbf{c}^2d^2+4\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2\right]d^2\Big\}\\
&= \frac{1}{4\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^4}\left\{4(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})^2d^2+\left[-4(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d})^2\right]d^2\right\}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

deci *vectorii proprii, corespunzând unor valori proprii* distincte, *sunt ortogonali*.

## 4.2 Construcţia elipsei

Introducem numerele $a, b > 0$ astfel încât[2]

$$a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} > b=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$$

---

[1] În *cazul* $\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}=0$, cel puţin unul dintre vectorii daţi de formulele (4.4), (4.5) va fi nul. Aici, putem folosi ca vectori proprii vectorii $\{\overline{\mathbf{c}},\overline{d}\}$.

[2] Ne interesează doar *cazul* $\lambda_1\neq\lambda_2$.

şi versorii ortogonali

$$\bar{i}_2 = \frac{\overline{u}_1}{|\overline{u}_1|}, \quad \bar{j}_2 = \frac{\overline{u}_2}{|\overline{u}_2|}.$$

Fixăm punctul $C \in E_2$. Atunci, dreptele $\Delta_3 = \Delta(C, \overrightarrow{i}_2)$ şi $\Delta_4 = \Delta(C, \overrightarrow{j}_2)$, unde

$$\overrightarrow{i}_2,\ \overrightarrow{j}_2 \in T_C\mathbb{R}^2, \qquad \overrightarrow{i}_2 \in \bar{i}_2,\ \overrightarrow{j}_2 \in \bar{j}_2,$$

sunt axele de simetrie ale elipsei.

Folosim perechea de raze conjugate $\left\{a \cdot \overrightarrow{i}_2, b \cdot \overrightarrow{j}_2\right\} \subset T_C\mathbb{R}^2$ pentru a construi elipsa.

## 4.3 Reconstituirea elipsei

În contextul formulelor (3.5), (3.7), avem[3]

$$\begin{cases} a \cdot b = \left|\bar{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|, \\ a^2 + b^2 = \mathbf{c}^2 + d^2. \end{cases}$$

Conform Lemei 3.3,

$$a = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\mathbf{c}^2 + d^2 + 2\left|\bar{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|} + \sqrt{\mathbf{c}^2 + d^2 - 2\left|\bar{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|}\right]$$

şi

$$b = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\mathbf{c}^2 + d^2 + 2\left|\bar{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|} - \sqrt{\mathbf{c}^2 + d^2 - 2\left|\bar{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|}\right],$$

de unde

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{c}^2 + d^2 + \sqrt{\Delta_\lambda}\right), \quad b^2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{c}^2 + d^2 - \sqrt{\Delta_\lambda}\right).$$

Observăm că

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\left|\bar{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2}\left(\mathbf{c}^2 + d^2 - \sqrt{\Delta_\lambda}\right) = \frac{2b^2}{2a^2b^2} = \frac{1}{a^2}$$

şi

[3] Ne interesează doar *cazul* $\Delta_\lambda > 0$, adică $\lambda_1 \neq \lambda_2$. În caz contrar, vezi (4.6), elipsa devine cerc.

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\left|\bar{\mathbf{c}}\times\bar{d}\right|^2}\left(\mathbf{c}^2+d^2+\sqrt{\Delta_\lambda}\right) = \frac{2a^2}{2a^2b^2} = \frac{1}{b^2}.$$

Mai departe,

$$\Delta_\lambda = (a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2-b^2)^2,$$

respectiv

$$\begin{aligned} d^2-\mathbf{c}^2+\sqrt{\Delta_\lambda} &= \left[\frac{a^2}{b^2}y_M^2+\frac{b^2}{a^2}(x_M+c)^2\right] - \left[(x_M+c)^2+y_M^2\right]+a^2-b^2 \\ &= \left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)y_M^2+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)(x_M+c)^2+a^2-b^2 \\ &= (a^2-b^2)\left[\frac{y_M^2}{b^2}-\frac{(x_M+c)^2}{a^2}+1\right] \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} d^2-\mathbf{c}^2-\sqrt{\Delta_\lambda} &= \left[\frac{a^2}{b^2}y_M^2+\frac{b^2}{a^2}(x_M+c)^2\right] - \left[(x_M+c)^2+y_M^2\right]-(a^2-b^2) \\ &= (a^2-b^2)\left[\frac{y_M^2}{b^2}-\frac{(x_M+c)^2}{a^2}-1\right]. \end{aligned}$$

Au loc relaţiile — vezi (3.11) —

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{\bar{\mathbf{c}}\cdot\bar{d}}{a^2b^2}\bar{\mathbf{c}}+\frac{a^2-b^2}{2a^2b^2}\left[\frac{y_M^2}{b^2}-\frac{(x_M+c)^2}{a^2}+1\right]\bar{d} \\ &= \frac{b^2-a^2}{a^3b^3}y_M(x_M+c)\left[(x_M+c)\bar{i}+y_M\bar{j}\right] \\ &+ \frac{a^2-b^2}{2a^2b^2}\left[\frac{y_M^2}{b^2}-\frac{(x_M+c)^2}{a^2}+1\right]\left[-\frac{ay_M}{b}\bar{i}+\frac{b}{a}(x_M+c)\bar{j}\right] \\ &= \left\{\frac{b^2-a^2}{a^3b^3}y_M(x_M+c)^2-\frac{a^2-b^2}{2ab^3}y_M\left[\frac{y_M^2}{b^2}-\frac{(x_M+c)^2}{a^2}+1\right]\right\}\bar{i} \\ &+ \left\{\frac{b^2-a^2}{a^3b^3}y_M^2(x_M+c)+\frac{a^2-b^2}{2a^3b}\left[\frac{y_M^2}{b^2}-\frac{(x_M+c)^2}{a^2}+1\right](x_M+c)\right\}\bar{j}. \end{aligned}$$

*Coeficientul vectorului* $\bar{i}$ se reorganizează ca

$$\begin{aligned} &\frac{b^2-a^2}{a^3b^3}y_M(x_M+c)^2-\frac{a^2-b^2}{2ab^5}y_M^3+\frac{a^2-b^2}{2a^3b^3}y_M(x_M+c)^2-\frac{a^2-b^2}{2ab^3}y_M \\ &= -\frac{a^2-b^2}{2a^3b^3}y_M(x_M+c)^2-\frac{a^2-b^2}{2ab^5}y_M^3-\frac{a^2-b^2}{2ab^3}y_M \end{aligned}$$

$$= -\frac{a^2-b^2}{2ab^3} y_M \left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} + 1\right] = -\frac{a^2-b^2}{ab^3} y_M.$$

*Coeficientul vectorului* $\overline{j}$ se reorganizează ca

$$\begin{aligned} & -\frac{a^2-b^2}{2a^3b^3} y_M^2 (x_M+c) - \frac{a^2-b^2}{2a^5b}(x_M+c)^3 + \frac{a^2-b^2}{2a^3b}(x_M+c) \\ & = -\frac{a^2-b^2}{2a^3b}(x_M+c)\left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} - 1\right] = 0. \end{aligned}$$

Am ajuns la[4]

$$\overline{u}_1 = -\frac{a^2-b^2}{ab^3} y_M \cdot \overline{i},$$

deci *vectorul propriu* $\overline{u}_1$ *este coliniar cu versorul axei de simetrie Ox*.

Apoi,

$$\begin{aligned} \overline{u}_2 &= \frac{\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}}{a^2b^2}\overline{\mathbf{c}} + \frac{a^2-b^2}{2a^2b^2}\left[\frac{y_M^2}{b^2} - \frac{(x_M+c)^2}{a^2} - 1\right]\overline{d} \\ &= \left\{\frac{b^2-a^2}{a^3b^3} y_M (x_M+c)^2 - \frac{a^2-b^2}{2ab^3} y_M \left[\frac{y_M^2}{b^2} - \frac{(x_M+c)^2}{a^2} - 1\right]\right\}\overline{i} \\ &+ \left\{\frac{b^2-a^2}{a^3b^3} y_M^2 (x_M+c) + \frac{a^2-b^2}{2a^3b}\left[\frac{y_M^2}{b^2} - \frac{(x_M+c)^2}{a^2} - 1\right](x_M+c)\right\}\overline{j}. \end{aligned}$$

*Coeficientul vectorului* $\overline{i}$ se reorganizează ca

$$\frac{a^2-b^2}{2ab^3} y_M \left[-\frac{(x_M+c)^2}{a^2} - \frac{y_M^2}{b^2} + 1\right] = 0.$$

*Coeficientul vectorului* $\overline{j}$ se reorganizează ca

$$-\frac{a^2-b^2}{2a^3b}(x_M+c)\left[\frac{(x_M+c)^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} + 1\right] = -\frac{a^2-b^2}{a^3b}(x_M+c).$$

Am ajuns la

$$\overline{u}_2 = -\frac{a^2-b^2}{a^3b}(x_M+c) \cdot \overline{j},$$

deci *vectorul propriu* $\overline{u}_2$ *este coliniar cu versorul axei de simetrie Oy*.

[4] Cum $\Delta_\lambda > 0$, avem $a > b$, deci $\overline{u}_1 \neq 0$.

# Capitolul 5
# Comentarii

## 5.1 Ecuaţiile tangentei şi normalei la elipsă în punctul curent al acesteia

Find dată matricea $\alpha$ — pe baza relaţiei (3.14) —, punctul $P$ (oarecare) de pe elipsă verifică ecuaţia (3.16), adică

$$\overline{r}_0 \cdot \alpha \overline{r}_0 = 1, \qquad \text{unde } \overline{r}_0 = \overline{CP}. \tag{5.1}$$

Introducem dreapta $\Delta = \Delta(P, \overrightarrow{v})$ — trecând prin $P$ şi având vectorul director $\overline{v}$ — cu ecuaţia[1]

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \lambda \cdot \overline{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aici, $\overline{r} = \overline{CP_\star}$, unde $P_\star$ este un punct de pe $\Delta$.

Ne interesează *intersecţiile* dreptei $\Delta$ cu elipsa. Avem ecuaţia algebrică, în variabila $\lambda$,

$$(\overline{r}_0 + \lambda \cdot \overline{v}) \cdot \alpha (\overline{r}_0 + \lambda \cdot \overline{v}) = 1,$$

care se rescrie ca[2]

$$(\overline{v} \cdot \alpha \overline{v}) \lambda^2 + 2 (\overline{v} \cdot \alpha \overline{r}_0) \lambda + \overline{r}_0 \cdot \alpha \overline{r}_0 = 1,$$

respectiv ca — matricea $\alpha$ este (strict) pozitiv definită —

$$\lambda \left[ R^2 \cdot \lambda + 2 (\overline{v} \cdot \alpha \overline{r}_0) \right] = 0, \qquad \text{unde } R^2 = \overline{v} \cdot \alpha \overline{v}. \tag{5.3}$$

[1] Această formulare este, evident, echivalentă cu

$$\overline{OP_\star} = \overline{OP} + \lambda \cdot \overline{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

[2] Vezi (5.9).

Aici, $R > 0$.

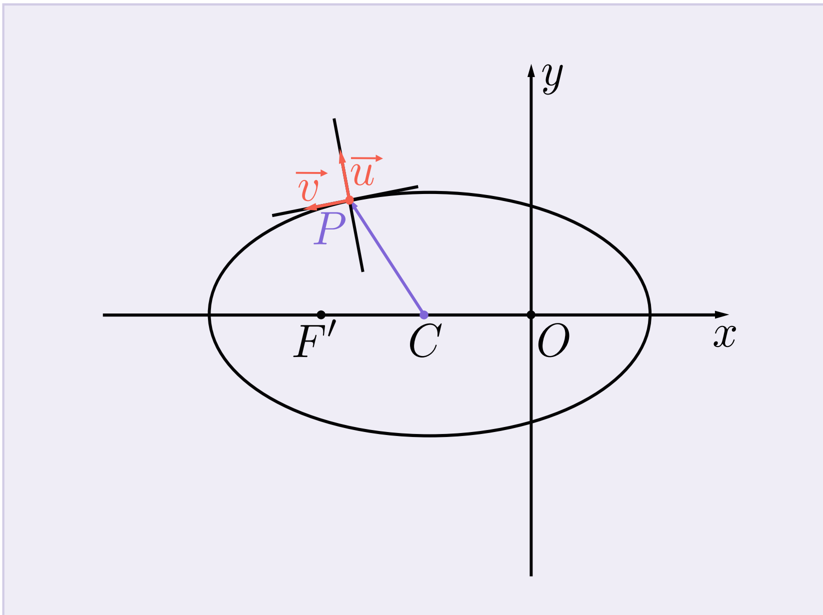


**Fig. 5.1** Normala la elipsa de matrice $\alpha$, în punctul $P$, are vectorul director $\overline{u} = \alpha\overline{CP}$. Tangenta la elipsă, în acelaşi punct, are vectorul director $\overline{v} = \overline{k} \times \alpha\overline{CP}$.

Observăm că *dreapta* $\Delta$ *îi este tangentă în* $P$ *elipsei dacă şi numai dacă ecuaţia (5.3) admite soluţia dublă* $\lambda_{1,2} = 0$, adică dacă şi numai dacă

$$\overline{v} \cdot \alpha\overline{r}_0 = 0. \tag{5.4}$$

Mai departe, pentru $\lambda \neq 0$ — deci $P^\star \neq P$ —, restricţia anterioară devine

$$\frac{1}{\lambda}\left(\overline{r} - \overline{r}_0\right) \cdot \alpha\overline{r}_0 = 0,$$

respectiv

$$\overline{r} \cdot \alpha\overline{r}_0 = \overline{r}_0 \cdot \alpha\overline{r}_0 = 1.$$

Cum $\alpha\overline{r}_0 \perp \overline{v}$ în (5.4), putem preciza vectorul director al *normalei la elipsă* care trece prin $P$, şi anume

$$\overline{u} = \alpha\overline{r}_0.$$

Remarcăm că $\overline{u} \cdot \left(\overline{k} \times \overline{u}\right) = 0$, deci putem desemna drept vector director al *tangentei la elipsă* care trece prin $P$ vectorul

$$\overline{v} = \overline{k} \times \alpha \overline{r}_0.$$

În contextul relaţiilor (3.5), via (5.2), (1.2), ajungem la *ecuaţia carteziană generală* a tangentei la elipsă care trece prin $P$, pusă sub forma[3]

$$\frac{(x_P + c) \cdot (x + c)}{a^2} + \frac{y_P \cdot y}{b^2} = 1, \tag{5.5}$$

unde $x = x_{P_\star}$, $y = y_{P_\star}$. Vezi şi [5, pag. 196, 272].

Apoi, folosind formula (1.2), obţinem *ecuaţia carteziană generală* a normalei la elipsă care trece prin $P$,

$$-a^2 y_P \cdot (x + c) + b^2 (x_P + c) \cdot y + (a^2 - b^2)(x_P + c) y_P = 0.$$

Vezi şi [17, pag. 64].

## 5.2 Completarea perechii de raze conjugate

În contextul[4] ecuaţiei (2.6), introducem dreapta $\Delta$, dată de ecuaţia (5.5).

Ne interesează *intersecţiile*[5] acestei drepte cu elipsa. Presupunând că *punctul $P$ nu este vârf al elipsei*, au loc relaţiile — aici, $\{x, y\}$ sunt coordonatele unui punct comun —

$$y = \frac{b^2}{y_P} \left[ 1 - \frac{(x_P + c)(x + c)}{a^2} \right], \tag{5.6}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\
&= \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{b^2}{y_P^2} \left[ 1 - \frac{(x_P + c)(x + c)}{a^2} \right]^2 \\
&= \frac{(x+c)^2}{a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{a^2 y_P^2} (x_P + c)^2 \right] + \frac{b^2}{y_P^2} - 2 \frac{b^2}{a^2 y_P^2} (x_P + c)(x + c) \\
&= \frac{b^2}{y_P^2} \cdot \frac{(x+c)^2}{a^2} \cdot \left[ \frac{(x_P + c)^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} \right] + \frac{b^2}{y_P^2} - 2 \frac{b^2}{a^2 y_P^2} (x_P + c)(x + c)
\end{aligned}$$

---

[3] Spunem că această ecuaţie a fost obţinută din (2.6) prin *dedublare* [17, pag. 62].

[4] Am construit, în secţiunea 5.1, ecuaţia carteziană a tangentei la elipsă folosind matricea $\alpha$ a acesteia. La rândul său, matricea $\alpha$ a fost definită, în (3.14), cu ajutorul unei perechi de raze conjugate. Calculul care urmează introduce *tangenta la elipsă* pe baza unei ecuaţii carteziene, *independent* de orice pereche de raze conjugate.

[5] Vezi şi [7, pag. xcvi].

$$= \frac{b^2}{a^2 y_P^2}(x+c)^2 + \frac{b^2}{y_P^2} - 2\frac{b^2}{a^2 y_P^2}(x_P+c)(x+c)$$

şi

$$\frac{a^2 y_P^2}{b^2} = (x+c)^2 + a^2 - 2(x_P+c)(x+c).$$

Apoi,

$$\begin{aligned} 0 &= (x+c)^2 - 2(x_P+c)(x+c) + a^2\left(1 - \frac{y_P^2}{b^2}\right) \\ &= (x+c)^2 - 2(x_P+c)(x+c) + (x_P+c)^2 \\ &= (x-x_P)^2. \end{aligned}$$

Am ajuns la *soluţia dublă* $x_{1,2} = x_P$. De unde, via (5.6), obţinem $y_{1,2} = y_P$. Aşadar, *dreapta $\Delta$ îi este tangentă elipsei în punctul $P$.*

Fie $P$ un punct (oarecare) al elipsei. Are loc relaţia (5.1). Căutăm punctul $P'$, situat tot pe elipsă, astfel încât *razele* $\left\{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'}\right\}$ *să fie conjugate*.

Cerem ca *vectorul $\overline{CP'}$ să fie coliniar cu vectorul director al dreptei $\Delta$*. Astfel, introducem numărul $R' > 0$ cu proprietatea că[6]

$$\overline{w} \cdot \alpha \overline{w} = \left(R'\right)^2, \qquad \text{unde } \overline{w} = \overline{k} \times \alpha \overline{r}_0. \tag{5.7}$$

Atunci, $\overline{r}_0 \times \overline{w} = \overline{k}$, *razele* $\left\{\overline{r}_0, \frac{1}{R'} \cdot \overline{w}\right\}$ *sunt conjugate*, de unde

$$\overrightarrow{CP'} \in \frac{1}{R'} \cdot \overline{w}.$$

**Lema 5.1.** *Razele conjugate* $\left\{\overline{r}_0, \frac{1}{R'} \cdot \overline{w}\right\}$ *pot fi scrise sub forma*

$$\begin{cases} \overline{CP} = m \cdot \overline{\mathbf{c}} + n \cdot \overline{d}, \\ \overline{CP'} = -n \cdot \overline{\mathbf{c}} + m \cdot \overline{d}, \end{cases} \tag{5.8}$$

*unde coeficienţii $\{m, n\}$ îndeplinesc condiţia (3.18).*

*Demonstraţie.* Observăm că

$$\begin{aligned} \overline{CP'} \cdot \alpha \overline{CP} &= \left(-n \cdot \overline{\mathbf{c}} + m \cdot \overline{d}\right) \cdot \left(m \cdot \overline{C} + n \cdot \overline{D}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

[6] Formula (3.15) a matricei $\alpha$ este *independentă* de orice pereche de raze conjugate. Introducând vectorul $\overline{u}$, vezi (1.2), al dreptei $\Delta$ din (5.5), observăm că — pentru $y_P \neq 0$ —

$$\overline{w} = -\frac{y_P}{b^2} \cdot \overline{u}.$$

respectiv

$$\overline{CP} \times \overline{CP'} = (m^2+n^2) \cdot \left(\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right) = \overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}.$$

Aşadar, vectorul $\overline{CP'}$ din (5.8) este perpendicular pe direcţia normalei la elipsă în punctul $P$ iar perechea $\left\{\overline{CP}, \overline{CP'}\right\}$ este pozitiv orientată. De unde rezultă că

$$\overline{CP'} = \frac{1}{R'} \cdot \overline{w} = -n \cdot \overline{\mathbf{c}} + m \cdot \overline{d}.$$

Justificarea s-a încheiat. □

Formula (5.7) generalizează expresia (3.2). Într-adevăr, în cazul cercului $\mathscr{C}(C,R)$, unde $R^2 = \alpha^2 + \beta^2$ — cu notaţiile originale —, avem matricea $\alpha = R^{-2} \cdot I_2$ şi au loc restricţiile (4.6).

## 5.3 Împărţirea coardei în jumătăţi

Fie razele

$$\overline{\mathbf{c}} = \overline{CM}, \qquad \overline{d} = \overline{CM'}$$

şi punctul $P$, fixat pe segmentul $(CM)$. Introducem dreapta $\Delta = \Delta(P, \overrightarrow{\overline{d}})$, trecând prin $P$, paralelă cu $CM'$.

Ne interesează *intersecţiile* dreptei $\Delta$ cu elipsa. Astfel, au loc relaţiile

$$\left(\lambda \overline{\mathbf{c}} + \mu \overline{d}\right) \cdot \alpha \left(\lambda \overline{\mathbf{c}} + \mu \overline{d}\right) = 1,$$

unde $\overline{CP} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{c}}$ şi numărul $\lambda \in (0,1)$ este fixat, respectiv

$$\overline{CN} = \overline{CP} + \mu \cdot \overline{d}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Desfăcând parantezele[7], obţinem

$$(\overline{d} \cdot \alpha \overline{d}) \cdot \mu^2 + 2\lambda(\overline{\mathbf{c}} \cdot \alpha \overline{d}) \cdot \mu + \lambda^2(\overline{\mathbf{c}} \cdot \alpha \overline{\mathbf{c}}) = 1,$$

respectiv

$$\mu^2 + 2\lambda(\overline{\mathbf{c}} \cdot \alpha \overline{d})\mu + \lambda^2 = 1. \tag{5.10}$$

Ecuaţia algebrică (5.10), în variabila $\mu$, are discriminantul

---

[7] Matricea $\alpha$ fiind simetrică, este valabilă egalitatea

$$\overline{\mathbf{c}} \cdot \alpha \overline{d} = \overline{d} \cdot \alpha \overline{\mathbf{c}}. \tag{5.9}$$

$$\Delta_\mu = 4\left[1-\lambda^2+\lambda^2\left(\bar{\mathbf{c}}\cdot\alpha\bar{d}\right)^2\right] > 0,$$

deci admite *rădăcinile reale* $\mu_{1,2}$.

Observăm că *punctele de intersecţiei cu elipsa, $N$ şi $N'$*, ale dreptei $\Delta$ *sunt simetrice faţă de $P$* dacă şi numai dacă

$$\mu_1+\mu_2 = 0,$$

adică[8]

$$\bar{d}\cdot\alpha\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{c}}\cdot\alpha\bar{d} = 0. \tag{5.11}$$

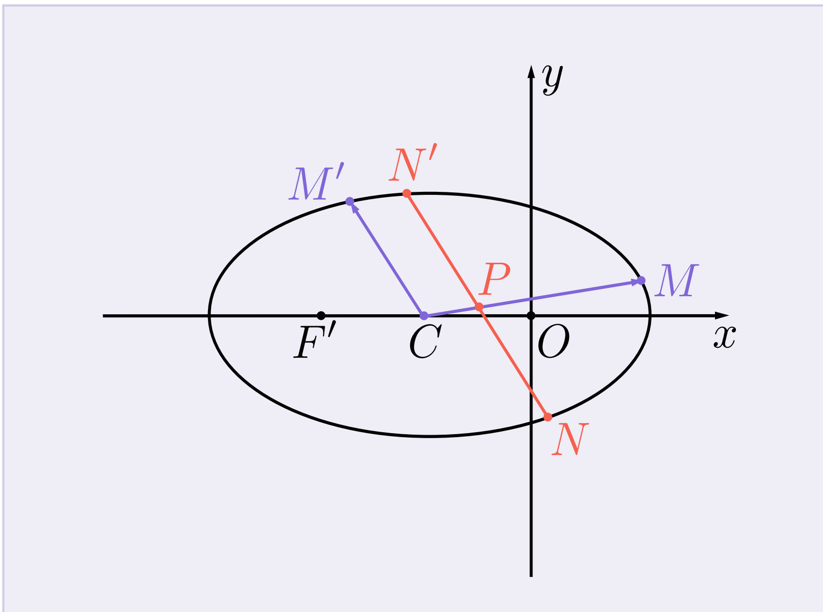


**Fig. 5.2** Coarda $NN'$, paralelă cu dreapta $CM'$, este împărţită în două părţi egale de dreapta $CM$ dacă şi numai dacă razele $\overrightarrow{CM}$ şi $\overrightarrow{CM'}$ sunt conjugate.

Restricţia (5.11) afirmă că dreapta $CM'$ este perpendiculară pe normala la elipsă în punctul $M$. Aşadar, *punctul $P$ este mijlocul segmentului $[NN']$ dacă şi numai dacă razele $\{\bar{\mathbf{c}},\bar{d}\}$ sunt conjugate*[9]. Vezi [2, pag. 3], [5, pag. 279].

[8] Fiind date două diametre, dacă unul dintre ele înjumătăţeşte coardele paralele cu celălalt, atunci şi acesta va înjumătăţi coardele paralele cu primul [Apollonius, I.15], conform [7, pag. 15]. De asemeni, [Apollonius, I.47, 48] în [7, pag. 37].

[9] Lui Arhimede îi era cunoscut faptul că segmentul $CM$ înjumătăţeşte coardele paralele cu tangenta în $M$ la elipsă, vezi [7, pag. li, II.4].

## 5.4 Tangente la elipsă dintr-un punct exterior acesteia. Cercul Fermat-Apollonius

Fie punctul $P \in E_2$, exterior elipsei, dat prin relaţia (3.17). Aici,

$$m^2 + n^2 > 1. \tag{5.12}$$

Ne interesează — dacă există — punctele $N$ şi $N'$, de pe elipsă, prin care trec *tangentele din P la aceasta*. Introducem vectorul

$$\bar{r}_2 = \overline{CP}$$

şi notăm cu $\bar{r}$ *prezumtiva* direcţie $\overline{CN}$.

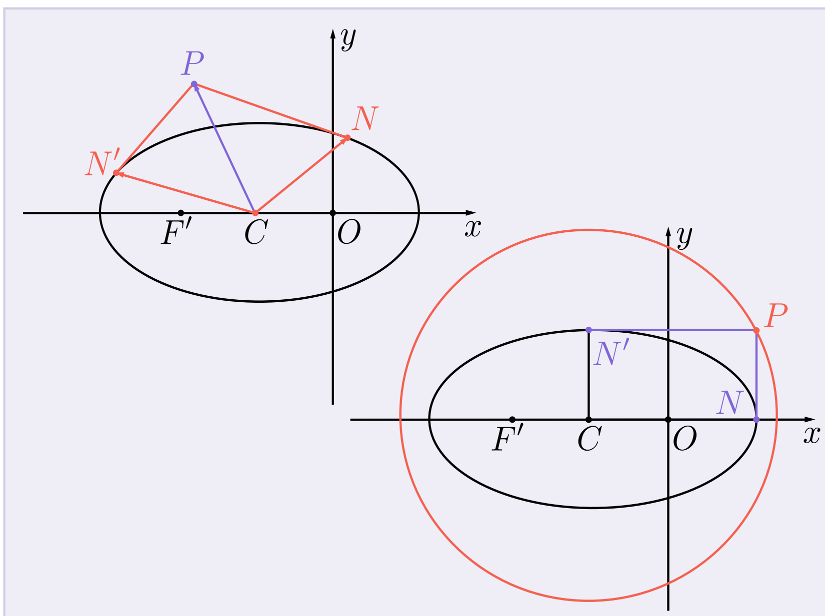


**Fig. 5.3** Punctele $P$, exterioare elipsei, din care se pot duce tangente ortogonale la aceasta, alcătuiesc cercul $\mathscr{C}\left(C, \sqrt{a^2+b^2}\right)$.

Au loc relaţiile

$$\begin{cases} \bar{r}_2 \cdot \alpha \bar{r} = 1, \\ \bar{r} \cdot \alpha \bar{r} = 1, \end{cases}$$

unde — vezi Lema 3.4 —

$$\bar{r} = \cos\varphi \cdot \bar{\mathbf{c}} + \sin\varphi \cdot \bar{d}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi),$$

respectiv

$$\alpha\bar{r} = \cos\varphi \cdot \overline{C} + \sin\varphi \cdot \overline{D}$$

şi

$$\begin{cases} m \cdot \cos\varphi + n \cdot \sin\varphi = 1, \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1. \end{cases} \tag{5.13}$$

*Presupunând că* $m \neq 0$, sistemul algebric (5.13) ne conduce la ecuaţia

$$\left(\frac{1 - n\sin\varphi}{m}\right)^2 + \sin^2\varphi = 1,$$

care se rescrie ca

$$(m^2 + n^2) \cdot z^2 - 2n \cdot z + 1 - m^2 = 0, \qquad \text{unde } z = \sin\varphi. \tag{5.14}$$

**Lema 5.2.** *Ştiind că are loc restricţia (5.12), ecuaţia algebrică (5.14) are rădăcinile reale şi situate în* $[-1, 1]$.

*Demonstraţie.* Discriminantul ecuaţiei este

$$\Delta_z = 4n^2 - 4(m^2 + n^2)(1 - m^2) = 4m^2(m^2 + n^2 - 1) \geq 0.$$

Soluţiile au formulele

$$z_{1,2} = \frac{1}{m^2 + n^2} \cdot \left(n \pm m\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right).$$

Estimarea

$$|z_{1,2}| \leq 1$$

este echivalentă cu

$$\left|n \pm m\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right| \leq m^2 + n^2.$$

Prin ridicare la pătrat, obţinem

$$n^2 \pm 2nm\sqrt{m^2 + n^2 - 1} - m^2 \leq m^2 n^2 + n^4,$$

respectiv

$$\pm 2nm\sqrt{m^2 + n^2 - 1} \leq n^2(m^2 + n^2 - 1) + m^2$$

şi

$$\left(n\sqrt{m^2+n^2-1}\mp m\right)^2 \geq 0.$$

Justificarea s-a încheiat. $\square$

Conform Lemei 5.2, am ajuns la

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1-n\sin\varphi}{m} = \frac{1}{m}\cdot\left(1-\frac{n^2\pm mn\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\right)\\ &= \frac{m\mp n\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}.\end{aligned}$$

În concluzie, punctul $N'$ este dat de formula

$$\begin{aligned}\overline{r}_0 &= \overline{CN'} = m_0\cdot\overline{\mathbf{c}}+n_0\cdot\overline{d}\\ &= \frac{m-n\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\overline{\mathbf{c}}+\frac{n+m\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\overline{d}\end{aligned} \tag{5.15}$$

iar punctul $N$ de formula

$$\begin{aligned}\overline{r}_1 &= \overline{CN} = m_1\cdot\overline{\mathbf{c}}+n_1\cdot\overline{d}\\ &= \frac{m+n\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\overline{\mathbf{c}}+\frac{n-m\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\overline{d}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Am introdus punctele $N, N'$ astfel încât

$$\overline{CN}\times\overline{CN'} = \frac{2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left(\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right),$$

adică *perechea* $\left\{\overline{CN},\overline{CN'}\right\}$ *să fie pozitiv orientată în planul conicei*.

**Lema 5.3.** *Avem relaţia*

$$\overline{NN'} = \frac{2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left(-n\cdot\overline{\mathbf{c}}+m\cdot\overline{d}\right).$$

*Demonstraţie.* Observăm că

$$\overline{NN'} = \overline{r}_0-\overline{r}_1 = (m_0-m_1)\cdot\overline{\mathbf{c}}+(n_0-n_1)\cdot\overline{d}.$$

Justificarea s-a încheiat. $\square$

Introducem vectorii

$$\begin{cases}\overline{c}_1 = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\overline{\mathbf{c}}+\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\overline{d},\\ \overline{d}_1 = \frac{-n}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\overline{\mathbf{c}}+\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\overline{d}.\end{cases}$$

Conform (5.8), razele $\left\{\overline{c}_1,\overline{d}_1\right\}$ sunt conjugate. Remarcăm că

$$\overline{CP} \parallel \overline{c}_1, \qquad \overline{NN'} \parallel \overline{d}_1.$$

De unde, *dreapta CP împarte în două jumătăţi*[10] *coarda* $NN'$. Astfel, este generalizată următoarea *proprietate a cercului*: dreapta care uneşte un punct exterior cercului cu centrul acestuia este mediatoarea coardei având drept capete punctele de contact cu cercul ale tangentelor la acesta duse prin punctul exterior.

Dreapta $NN'$ se numeşte *polara*, în raport cu elipsa, a punctului (*polului*) $P$. Vezi [5, pag. 275] şi [1, pag. 68].

Până la finalul secţiunii, considerăm razele conjugate suprapuse axelor de simetrie ale elipsei,

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{c}} = \overline{a} = a \cdot \overline{i}, \\ \overline{d} = \overline{b} = b \cdot \overline{j}. \end{cases} \tag{5.17}$$

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} \overline{PN'} &= \overline{CN'} - \overline{CP} \\ &= \left[ m \left( \frac{1}{m^2+n^2} - 1 \right) - \frac{n}{m^2+n^2} \sqrt{m^2+n^2-1} \right] \cdot \overline{a} \\ &+ \left[ n \left( \frac{1}{m^2+n^2} - 1 \right) + \frac{m}{m^2+n^2} \sqrt{m^2+n^2-1} \right] \cdot \overline{b}, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \overline{PN} &= \overline{CN} - \overline{CP} \\ &= \left[ m \left( \frac{1}{m^2+n^2} - 1 \right) + \frac{n}{m^2+n^2} \sqrt{m^2+n^2-1} \right] \cdot \overline{a} \\ &+ \left[ n \left( \frac{1}{m^2+n^2} - 1 \right) - \frac{m}{m^2+n^2} \sqrt{m^2+n^2-1} \right] \cdot \overline{b} \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} &\overline{PN} \cdot \overline{PN'} = \left[ m^2 \left( \frac{1}{m^2+n^2} - 1 \right)^2 - \left( \frac{n}{m^2+n^2} \sqrt{m^2+n^2-1} \right)^2 \right] \cdot a^2 \\ &+ \left[ n^2 \left( \frac{1}{m^2+n^2} - 1 \right)^2 - \left( \frac{m}{m^2+n^2} \sqrt{m^2+n^2-1} \right)^2 \right] \cdot b^2 \\ &= \frac{m^2+n^2-1}{(m^2+n^2)^2} \cdot \left\{ \left[ m^2(m^2+n^2-1) - n^2 \right] \cdot a^2 + \left[ n^2(m^2+n^2-1) - m^2 \right] \cdot b^2 \right\} \\ &= \frac{m^2+n^2-1}{(m^2+n^2)^2} \cdot \left[ (m^2-1)(m^2+n^2) \cdot a^2 + (n^2-1)(m^2+n^2) \cdot b^2 \right] \end{aligned}$$

[10] Vezi [Apollonius, II.29, 30, 38] în [7, pag. 66].

$$= \frac{m^2+n^2-1}{m^2+n^2} \cdot \left\{ \left[ (ma)^2 + (nb)^2 \right] - \left( a^2 + b^2 \right) \right\}$$
$$= \frac{m^2+n^2-1}{m^2+n^2} \cdot \left[ |\overline{CP}|^2 - \left( a^2 + b^2 \right) \right].$$

De aici rezultă că *locul geometric al punctelor $P$ pentru care $PN \perp PN'$ este cercul $\mathscr{C}\left(C, \sqrt{a^2+b^2}\right)$*. El poartă numele de *cercul Fermat-Apollonius*, vezi [1, pag. 13].

## 5.5 Tangente la elipsă dintr-un punct exterior acesteia. Proprietăţi de izogonalitate ale elipsei

Rămânem în contextul Secţiunii 5.4. Baza $\mathscr{P}$ a planului $T\mathbb{R}^2$ este dată de relaţiile (5.17).

**Lema 5.4.** *Ştiind că are loc restricţia (5.12), sunt valabile inegalităţile*

$$m^2 + n^2 > \frac{c}{a} \cdot \left| m \pm n\sqrt{m^2+n^2-1} \right|.$$

*Demonstraţie.* Plecând de la inegalitatea

$$(|m|-1)^2 \geq 0,$$

deducem că

$$(m^2+n^2)\cdot(m^2+1) \geq 2|m|\cdot(m^2+n^2)$$

şi

$$(m^2+n^2)^2 - 2|m|(m^2+n^2) + m^2 \geq n^2(m^2+n^2-1),$$

respectiv

$$\left(m^2+n^2-|m|\right)^2 \geq \left[ n\sqrt{m^2+n^2-1} \right]^2$$

şi

$$\left| m^2+n^2-|m| \right| \geq |n|\sqrt{m^2+n^2-1}.$$

Observăm că, dacă $|m| \geq m^2+n^2$, atunci

$$|m| \in [0,1],$$

respectiv $1 \geq m^2+n^2$. Aşadar,

$$\left| m^2 + n^2 - |m| \right| = m^2 + n^2 - |m|$$

şi

$$m^2 + n^2 \geq |m| + |n| \sqrt{m^2 + n^2 - 1} \geq \left| m \pm n \sqrt{m^2 + n^2 - 1} \right|.$$

Justificarea s-a încheiat. □

**Lema 5.5.** *Avem egalitatea*

$$\left( m + n \sqrt{m^2 + n^2 - 1} \right) \cdot \left( -m + n \sqrt{m^2 + n^2 - 1} \right) = (n^2 - 1) \cdot (m^2 + n^2).$$

*Demonstraţie.* Desfacem parantezele din membrul stâng şi redistribuim termenii.
Justificarea s-a încheiat. □

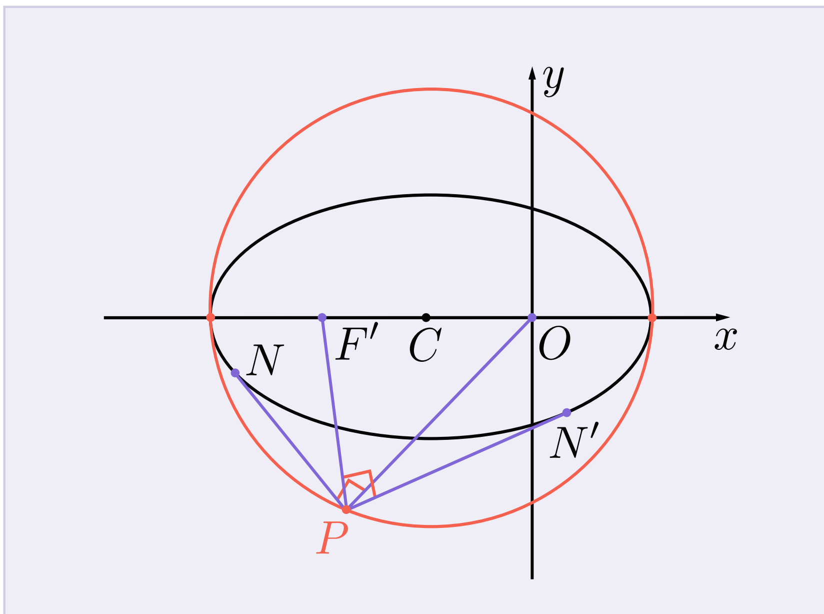


**Fig. 5.4** Punctele $P$, exterioare elipsei, din care se pot duce tangente la aceasta perpendiculare pe (câte una dintre) dreptele ce unesc punctul cu focarele, alcătuiesc cercul $\mathscr{C}(C,a)$. Aici, $\overline{CP} = m \cdot \overline{a} + n \cdot \overline{b}$ şi $n < 0$, respectiv $\overline{OP} \perp \overline{PN}$ şi $\overline{F'P} \perp \overline{PN'}$.

Au loc relaţiile

$$\overline{PN} = \overline{CN} - \overline{CP}$$
$$= \frac{1}{m^2 + n^2} \cdot \left\{ \left[ m + n \sqrt{m^2 + n^2 - 1} - m(m^2 + n^2) \right] \cdot \overline{a} \right.$$

$$+\left[n-m\sqrt{m^2+n^2-1}-n(m^2+n^2)\right]\cdot\overline{b}\Big\}$$
$$=\frac{-\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left[\left(-n+m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\cdot\overline{a}+\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\cdot\overline{b}\right]$$

şi

$$\overline{PO}=\overline{CO}-\overline{CP}=-\left[\left(m-\frac{c}{a}\right)\cdot\overline{a}+n\cdot\overline{b}\right],$$

respectiv

$$\overline{PN}\times\overline{PO}=\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left[\left(-n+m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)n-\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(m-\frac{c}{a}\right)\right]\cdot(\overline{a}\times\overline{b})$$
$$=-\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left[m^2+n^2-\frac{c}{a}\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]\cdot(\overline{a}\times\overline{b}) \tag{5.18}$$

şi

$$\overline{PN}\cdot\overline{PO}=\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left[\left(-n+m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\left(m-\frac{c}{a}\right)a^2\right.$$
$$\left.+\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)nb^2\right]$$
$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left[-mn(a^2-b^2)+ca\left(n-m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right.$$
$$\left.+(m^2a^2+n^2b^2)\sqrt{m^2+n^2-1}\right]$$
$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left\{-mnc^2+ca\left(n-m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right.$$
$$\left.+[m^2a^2+n^2(a^2-c^2)]\sqrt{m^2+n^2-1}\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left[ca\left(n-m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)-nc^2\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right.$$
$$\left.+a^2(m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1}\right]$$
$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left\{\left\{a^2\sqrt{m^2+n^2-1}\left[m^2+n^2-\frac{c}{a}\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]\right.\right.$$
$$\left.+ca\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\sqrt{m^2+n^2-1}\right\}$$
$$\left.+ca\left(n-m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)-nc^2\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left\{a^2\sqrt{m^2+n^2-1}\left[m^2+n^2-\frac{c}{a}\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]\right.$$
$$\left.+can(m^2+n^2)-nc^2\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left[m^2+n^2-\frac{c}{a}\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right] \\
&\times \left(a^2\sqrt{m^2+n^2-1}+can\right). \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

Analog,

$$
\begin{aligned}
&\overline{PN'} = \overline{CN'} - \overline{CP} \\
&= \frac{-\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\cdot\left\{\left[n+m\sqrt{m^2+n^2-1}\right]\cdot\overline{a}+\left[-m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right]\cdot\overline{b}\right\}
\end{aligned}
$$

şi

$$
\overline{PF'} = \overline{CF'} - \overline{CP} = -\left[\left(m+\frac{c}{a}\right)\cdot\overline{a}+n\cdot\overline{b}\right],
$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
&\overline{PN'} \times \overline{PF'} \\
&= \frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left[m^2+n^2+\frac{c}{a}\left(m-n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right) \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

şi

$$
\begin{aligned}
&\overline{PN'} \cdot \overline{PF'} \\
&= \frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left[m^2+n^2+\frac{c}{a}\left(m-n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right] \\
&\times \left(a^2\sqrt{m^2+n^2-1}+can\right). \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

**Lema 5.6.** *Egalităţile*

$$
\overline{PN} \cdot \overline{PO} = \overline{PN'} \cdot \overline{PF'} = 0 \qquad (5.22)
$$

*sunt valabile dacă şi numai dacă* $n < 0$ *şi*[11]

$$
\left|\overline{CP}\right| = a.
$$

*Demonstraţie.* Lema 5.4 arată că *unul dintre numerele* $\overline{PN} \cdot \overline{PO}$, $\overline{PN'} \cdot \overline{PF'}$ *este nul dacă şi numai dacă ambele sunt nule*, respectiv *numerele sunt nule dacă şi numai dacă*

$$
a^2\sqrt{m^2+n^2-1}+can = 0.
$$

Astfel, ajungem la $n < 0$, respectiv — prin ridicare la pătrat — la

$$
a^2m^2+b^2n^2 = a^2.
$$

[11] Această proprietate reiese din [Apollonius, III.49, 50], vezi [7, pag. 116].

Justificarea s-a încheiat. $\square$

*Presupunem că*[12] $P \notin \mathscr{C}(C,a)$. Expresiile (5.18), (5.19), (5.20) şi (5.21) ne conduc la

$$\frac{\overline{PN}\times\overline{PO}}{\overline{PN}\cdot\overline{PO}} = -\frac{\overline{PN'}\times\overline{PF'}}{\overline{PN'}\cdot\overline{PF'}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{m^2+n^2-1}+can}\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$$
$$= -\frac{b}{a\sqrt{m^2+n^2-1}+cn}\cdot\overline{k}.$$

Aşadar, *tangentele duse din punctul P, exterior elipsei, la aceasta fac unghiuri egale cu dreptele ce unesc punctul cu focarele*. Vezi [1, pag. 10, Theorem 1.3] şi [Apollonius, III.45, 46] în [7, pag. 114].

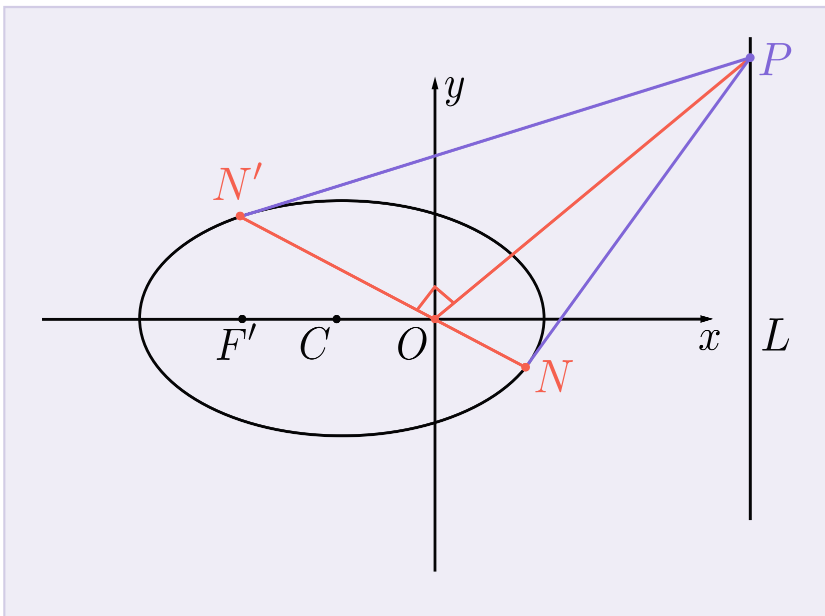


**Fig. 5.5** Punctele $P$, exterioare elipsei, pentru care dreapta ce uneşte punctul cu unul dintre focare este perpendiculară pe dreptele ce unesc focarul (respectiv) cu punctele de contact ale tangentelor duse din punct, se găsesc pe dreptele $L$, $L'$. Aici, punctele $N$, $O$, $N'$ sunt coliniare şi $\overline{PO}\perp\overline{NN'}$.

*Presupunem că*[13] $n^2 \neq 1$. Au loc relaţiile

$$\left|\overline{PO}\right|^2 = \left(m-\frac{c}{a}\right)^2 a^2 + n^2b^2$$

---

[12] Conform (5.22), $\left(\overline{PN}\cdot\overline{PO}\right)\cdot\left(\overline{PN'}\cdot\overline{PF'}\right)\neq 0$.

[13] Situaţia $n^2 = 1$ este tratată în Lema 2.7.

$$
\begin{aligned}
&= m^2a^2 + c^2 - 2mca + n^2b^2 = m^2a^2 + n^2(a^2 - c^2) + c^2 - 2mca \\
&= (m^2 + n^2)a^2 - c^2(n^2 - 1) - 2mca \\
&= a^2\left[m^2 + n^2 - \frac{c}{a}\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right)\right] \\
&+ ac\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right) - c^2(n^2 - 1) - 2mca \\
&= a^2\left[m^2 + n^2 - \frac{c}{a}\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right)\right] \\
&+ ac\left(-m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right) - c^2(n^2 - 1),
\end{aligned}
$$

respectiv — vezi Lema 5.5 —

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{PO}\right|^2 &= a^2\left[m^2 + n^2 - \frac{c}{a}\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right)\right] \\
&+ ac\frac{(n^2 - 1)(m^2 + n^2)}{m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}} - c^2(n^2 - 1) \\
&= \left[m^2 + n^2 - \frac{c}{a}\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right)\right] \\
&\times \left[a^2 + \frac{(n^2 - 1)ac}{m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}}\right].
\end{aligned}
$$

Apoi,

$$
\begin{aligned}
&\overline{ON} \times \overline{OP} = -\overline{ON} \times \overline{PO} = -\left(\overline{PN} - \overline{PO}\right) \times \overline{PO} = -\overline{PN} \times \overline{PO} \\
&= \frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 1}}{m^2 + n^2}\left[m^2 + n^2 - \frac{c}{a}\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right)\right] \cdot \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

şi

$$
\begin{aligned}
&\overline{ON} \cdot \overline{OP} = -\overline{ON} \cdot \overline{PO} = -\overline{PN} \cdot \overline{PO} + \left|\overline{PO}\right|^2 \\
&= -\frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 1}}{m^2 + n^2}\left[m^2 + n^2 - \frac{c}{a}\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right)\right] \\
&\times \left(a^2\sqrt{m^2 + n^2 - 1} + can\right) \\
&+ \left[m^2 + n^2 - \frac{c}{a}\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right)\right] \cdot \left[a^2 + \frac{(n^2 - 1)ac}{m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}}\right] \\
&= \left[m^2 + n^2 - \frac{c}{a}\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right)\right] \\
&\times \left[-\frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 1}}{m^2 + n^2}\left(a^2\sqrt{m^2 + n^2 - 1} + can\right) + a^2 + \frac{(n^2 - 1)ac}{m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}}\right] \\
&= \left[m^2 + n^2 - \frac{c}{a}\left(m + n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$\times\left[\frac{a^2}{m^2+n^2}-can\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}+\frac{(n^2-1)ac}{m+n\sqrt{m^2+n^2-1}}\right]$$
$$=\left[m^2+n^2-\frac{c}{a}\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]$$
$$\times\left[\frac{a^2}{m^2+n^2}-can\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}+\frac{(n^2-1)ac}{\frac{(n^2-1)(m^2+n^2)}{-m+n\sqrt{m^2+n^2-1}}}\right]$$
$$=\left[m^2+n^2-\frac{c}{a}\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]\cdot\frac{a^2-cam}{m^2+n^2}. \tag{5.24}$$

Mai departe — via Lema 5.3 —,

$$\overline{OP}\times\overline{ON'}=\overline{OP}\times\left(\overline{ON}+\overline{NN'}\right)$$
$$=-\overline{ON}\times\overline{OP}+\frac{2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left[\overline{OP}\times\left(-n\cdot\overline{a}+m\cdot\overline{b}\right)\right]$$
$$=-\overline{ON}\times\overline{OP}+\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left[2\left(m^2+n^2\right)-\frac{2cm}{a}\right]\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left[m^2+n^2-\frac{c}{a}\left(m-n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right) \tag{5.25}$$

şi

$$\overline{OP}\cdot\overline{ON'}=\overline{OP}\cdot\left(\overline{ON}+\overline{NN'}\right)=\overline{OP}\cdot\overline{ON}+\overline{OP}\cdot\overline{NN'}$$
$$=\left[m^2+n^2-\frac{c}{a}\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]\frac{a^2-cam}{m^2+n^2}+\overline{OP}\cdot\overline{NN'},$$

respectiv

$$\overline{OP}\cdot\overline{NN'}=\frac{2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left[-\left(m-\frac{c}{a}\right)na^2+nmb^2\right]$$
$$=\frac{2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left[-mn(a^2-b^2)+can\right]=\frac{2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left(-mnc^2+can\right)$$

şi

$$\overline{OP}\cdot\overline{ON'}$$
$$=\frac{a(a-cm)}{m^2+n^2}\cdot\left(m^2+n^2\right)-\frac{c(a-cm)}{m^2+n^2}\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)$$
$$+\frac{2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\left(-mnc^2+can\right)$$
$$=\frac{a^2-cam}{m^2+n^2}\cdot\left[m^2+n^2-\frac{c}{a}\left(m-n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]. \tag{5.26}$$

**Lema 5.7.** *Egalităţile*

$$\overline{OP}\cdot\overline{ON}=\overline{OP}\cdot\overline{ON'}=0 \tag{5.27}$$

*sunt valabile dacă şi numai dacă* $m=\frac{a}{c}$, *adică*[14]

$$P\in L.$$

*Demonstraţie.* Lema 5.4 arată că *unul dintre numerele* $\overline{OP}\cdot\overline{ON}$, $\overline{OP}\cdot\overline{ON'}$ *este nul dacă şi numai dacă ambele sunt nule*, respectiv *numerele sunt nule dacă şi numai dacă*

$$a^2-cam=0.$$

Justificarea s-a încheiat. □

*Presupunem că*[15] $P\notin L$, $n^2\neq 1$. Expresiile (5.23), (5.24), (5.25) şi (5.26) ne conduc la

$$\begin{aligned}\frac{\overline{ON}\times\overline{OP}}{\overline{ON}\cdot\overline{OP}}=-\frac{\overline{ON'}\times\overline{OP}}{\overline{ON'}\cdot\overline{OP}}&=\frac{\sqrt{m^2+n^2-1}}{a(a-cm)}\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\\&=\frac{b\sqrt{m^2+n^2-1}}{a-cm}\cdot\overline{k}.\end{aligned}$$

În concluzie, *dreapta ce uneşte punctul P, exterior elipsei, cu unul dintre focare face unghiuri egale cu dreptele care trec prin focarul respectiv şi prin picioarele tangentelor duse din punct*. Vezi [1, pag. 12, Theorem 1.4].

## 5.6 Proprietatea optică a elipsei

Fie $PQ$, unde $Q\in F'O$, normala la elipsă, dusă prin punctul $P$. Notăm cu $R$ şi $S$ picioarele perpendicularelor pe dreapta $PQ$, duse din focarele $F'$, respectiv $O$. Evident, *triunghiurile* $RF'Q$ *şi* $SOQ$ *sunt asemenea*, de unde

$$\frac{d(F',PQ)}{d(O,PQ)}=\frac{\left|\overline{F'R}\right|}{\left|\overline{OS}\right|}=\frac{\left|\overline{F'Q}\right|}{\left|\overline{OQ}\right|}. \tag{5.28}$$

În contextul egalităţilor (2.11), (2.12), au loc relaţiile

$$\alpha\overline{CP}\equiv\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_P+c\\ y_P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_P+c}{a^2}\\ \\ \frac{y_P}{b^2}\end{pmatrix}$$

---

[14] Vezi [14, pag. 121, Exercise 14].

[15] Conform (5.27), $\left(\overline{OP}\cdot\overline{ON}\right)\cdot\left(\overline{OP}\cdot\overline{ON'}\right)\neq 0$.

$$= \frac{x_P + c}{a^2} \cdot \bar{i} + \frac{y_P}{b^2} \cdot \bar{j}$$

şi

$$\begin{aligned}\overline{F'P} &= \overline{OP} - \overline{OF'} = \left(x_P \cdot \bar{i} + y_P \cdot \bar{j}\right) - \left[(-2c) \cdot \bar{i}\right] \\ &= (x_P + 2c) \cdot \bar{i} + y_P \cdot \bar{j},\end{aligned}$$

respectiv — via (2.7) —

$$\begin{aligned}\overline{F'P} \times \alpha\overline{CP} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_P + 2c & y_P & 0 \\ \frac{x_P + c}{a^2} & \frac{y_P}{b^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{(x_P + 2c)y_P}{b^2} - \frac{(x_P + c)y_P}{a^2}\right] \cdot \bar{k} \\ &= \frac{y_P}{a^2b^2}\left[(a^2 - b^2)x_P + c(2a^2 - b^2)\right] \cdot \bar{k} = \frac{y_P}{a^2b^2}\left[c^2x_P + c(a^2 + c^2)\right] \cdot \bar{k} \\ &= y_P\frac{c^2}{a^2b^2}\left(x_P + \frac{a^2 + c^2}{c}\right) \cdot \bar{k} = y_P\frac{c^2}{a^2b^2}\left[x_P + \left(\frac{a}{e} + c\right)\right] \cdot \bar{k} \\ &= y_P\frac{c^2}{a^2b^2}\left[\frac{2a}{e} - (h - x_P)\right] \cdot \bar{k} \qquad (5.29)\end{aligned}$$

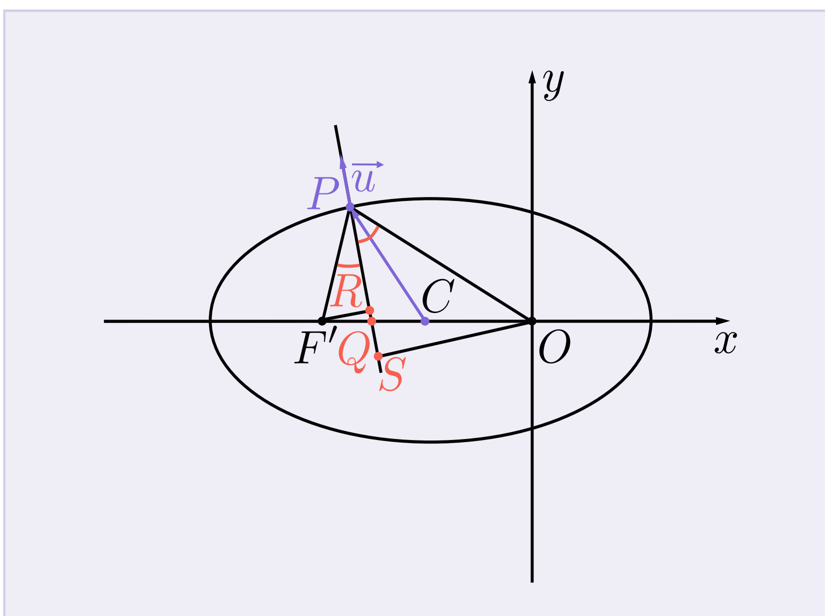


**Fig. 5.6** Normala $PQ$, la elipsă, este bisectoarea interioară a unghiului $OPF'$.

şi — via (2.10) —

$$\overline{OP} \times \alpha\overline{CP} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_P & y_P & 0 \\ \frac{x_P+c}{a^2} & \frac{y_P}{b^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{x_P y_P}{b^2} - \frac{(x_P+c)y_P}{a^2}\right] \cdot \bar{k}$$
$$= \frac{y_P}{a^2b^2}\left[a^2 x_P - b^2(x_P+c)\right] \cdot \bar{k} = y_P \frac{c^2}{a^2b^2}\left(x_P - \frac{b^2}{c}\right) \cdot \bar{k}$$
$$= y_P \frac{c^2}{a^2b^2}(x_P - h) \cdot \bar{k}. \tag{5.30}$$

*Presupunând că $P \notin Ox$,* pe baza egalităţilor (1.3), (5.29), (5.30), avem

$$\frac{d(O,PQ)}{d(F',PQ)} = \frac{\left|\overline{OP} \times \alpha\overline{CP}\right|}{\left|\overline{F'P} \times \alpha\overline{CP}\right|} = \frac{|h - x_P|}{\left|\frac{2a}{e} - (h - x_P)\right|} = \frac{d(P,O)}{d(P,F')}$$
$$= \frac{\left|\overline{PO}\right|}{\left|\overline{PF'}\right|}. \tag{5.31}$$

Din (5.28), (5.31) rezultă că

$$\frac{\left|\overline{OP}\right|}{\left|\overline{PF'}\right|} = \frac{\left|\overline{OQ}\right|}{\left|\overline{QF'}\right|}.$$

Astfel, conform reciprocei teoremei bisectoarei (interioare), deducem că *dreapta $PQ$ este bisectoarea interioară*[16] *a unghiului $OPF'$*. Vezi şi [5, pag. 199], [1, pag. 8].

## 5.7 Intersecţia normalelor la elipsă duse prin punctele de tangenţă $N$ şi $N'$

În contextul formulelor (5.15), (5.16), au loc relaţiile

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda \cdot \alpha\bar{r}_0, \\ \bar{r} = \bar{r}_1 + \mu \cdot \alpha\bar{r}_1, \end{cases} \qquad \bar{r} = \overline{CP'}, \tag{5.32}$$

unde — via (1.10) —

$$\lambda = \frac{(\bar{r}_1 - \bar{r}_0, \alpha\bar{r}_1, \alpha\bar{r}_0 \times \alpha\bar{r}_1)}{|\alpha\bar{r}_0 \times \alpha\bar{r}_1|^2}$$

şi — via (1.11) —

$$\mu = \frac{(\bar{r}_1 - \bar{r}_0, \alpha\bar{r}_0, \alpha\bar{r}_0 \times \alpha\bar{r}_1)}{|\alpha\bar{r}_0 \times \alpha\bar{r}_1|^2}.$$

[16] Această proprietate reiese din [Apollonius, III.48], conform [7, pag. 116].

Apoi,

$$\alpha\bar{r}_i = m_i \cdot \overline{C} + n_i \cdot \overline{D}, \qquad i \in \overline{0,1},$$

respectiv

$$\alpha\bar{r}_0 \times \alpha\bar{r}_1 = (m_0 n_1 - m_1 n_0) \cdot \left(\overline{C} \times \overline{D}\right) = \mathscr{D} \cdot \left(\overline{C} \times \overline{D}\right),$$

unde

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 \\ n_0 & n_1 \end{vmatrix}.$$

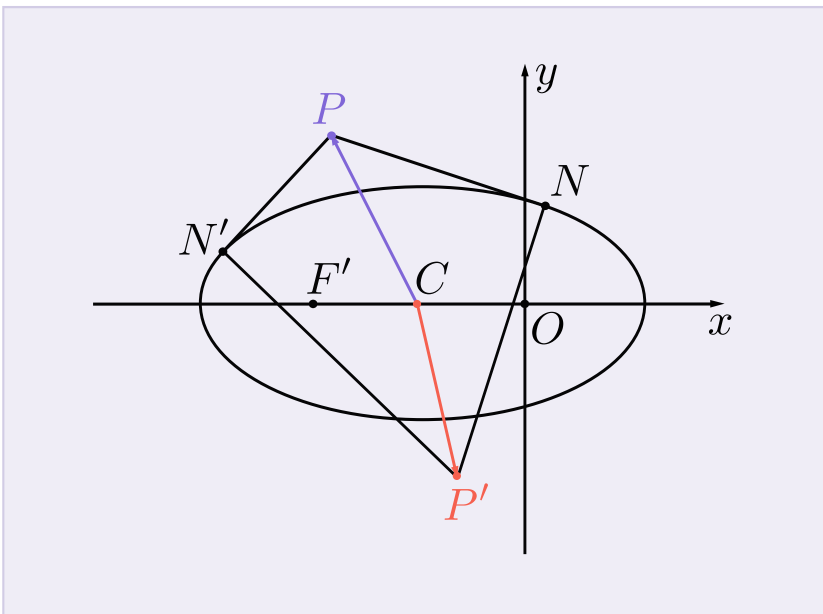


**Fig. 5.7** Normalele la elipsă, duse prin punctele de contact cu aceasta ale tangentelor $PN$ şi $PN'$, se intersectează în $P'$. În cazul cercului, punctele $O, C, F', P'$ coincid.

Calculăm produsele mixte în baza[17] $\left\{\bar{\mathbf{c}}, \overline{d}, \bar{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right\}$ a spaţiului $T\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
&(\bar{r}_1 - \bar{r}_0, \alpha\bar{r}_1, \alpha\bar{r}_0 \times \alpha\bar{r}_1) \\
&= \frac{1}{(\bar{\mathbf{c}}, \overline{d}, \bar{\mathbf{c}} \times \overline{d})} \cdot \begin{vmatrix} (\bar{r}_1 - \bar{r}_0) \cdot \bar{\mathbf{c}} & (\bar{r}_1 - \bar{r}_0) \cdot \overline{d} & 0 \\ (\alpha\bar{r}_1) \cdot \bar{\mathbf{c}} & (\alpha\bar{r}_1) \cdot \overline{d} & 0 \\ 0 & 0 & \mathscr{D} \cdot \left[\left(\overline{C} \times \overline{D}\right) \cdot \left(\bar{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right)\right] \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

[17] Vezi [11, Exerciţiul 4.32].

$$= \frac{1}{\left|\mathbf{\bar{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot \begin{vmatrix} (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \mathbf{\bar{c}} & (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \overline{d} & 0 \\ m_1 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathscr{D} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mathscr{D}}{\left|\mathbf{\bar{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot \begin{vmatrix} (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \mathbf{\bar{c}} & (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \overline{d} \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}$$

şi

$$(\overline{r}_1 - \overline{r}_0, \alpha\overline{r}_0, \alpha\overline{r}_0 \times \alpha\overline{r}_1) = \frac{\mathscr{D}}{\left|\mathbf{\bar{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot \begin{vmatrix} (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \mathbf{\bar{c}} & (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \overline{d} \\ m_0 & n_0 \end{vmatrix}.$$

Baza $\mathscr{P}^\star = \{\overline{C}, \overline{D}\}$, a planului $T\mathbb{R}^2$, fiind pozitiv orientată, avem

$$\overline{C} \times \overline{D} = \left|\overline{C} \times \overline{D}\right| \cdot \overline{k} = \frac{1}{\left|\mathbf{\bar{c}} \times \overline{d}\right|} \cdot \overline{k},$$

de unde

$$\lambda = \frac{1}{\mathscr{D}} \cdot \begin{vmatrix} (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \mathbf{\bar{c}} & (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \overline{d} \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}$$

şi

$$\mu = \frac{1}{\mathscr{D}} \cdot \begin{vmatrix} (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \mathbf{\bar{c}} & (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \overline{d} \\ m_0 & n_0 \end{vmatrix}.$$

**Lema 5.8.** *Are loc egalitatea*

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} m_0 & n_0 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} = -\frac{2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}.$$

*Demonstraţie.* Se observă că

$$\begin{aligned}
&m_0 n_1 - m_1 n_0 \\
&= \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \cdot \Big\{ \Big[ mn - (m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1} + mn(m^2+n^2-1) \Big] \\
&- \Big[ mn + (m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1} + mn(m^2+n^2-1) \Big] \Big\} \\
&= \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \cdot \Big\{ \Big[ mn(m^2+n^2) - (m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1} \Big] \\
&- \Big[ mn(m^2+n^2) + (m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1} \Big] \Big\}.
\end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. □

Via Lemele 5.3, 5.8, deducem că

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{\mathscr{D}} \cdot \begin{vmatrix} (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \overline{\mathbf{c}} & (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \overline{d} \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathscr{D}} \cdot \begin{vmatrix} -\overline{NN'} \cdot \overline{\mathbf{c}} & -\overline{NN'} \cdot \overline{d} \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (-n\overline{\mathbf{c}} + m\overline{d}) \cdot \overline{\mathbf{c}} & (-n\overline{\mathbf{c}} + m\overline{d}) \cdot \overline{d} \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \\
&= \left[-nn_1\mathbf{c}^2 + (mn_1) \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d})\right] - \left[-(m_1 n) \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}) + mm_1 d^2\right] \\
&= (mn_1 + m_1 n) \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}) - nn_1\mathbf{c}^2 - mm_1 d^2 \qquad (5.33) \\
&= \left( \frac{mn - m^2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} + \frac{mn + n^2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} \right) \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}) \\
&- \frac{n^2 - mn\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\mathbf{c}^2 - \frac{m^2 + mn\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} d^2 \\
&= \frac{2mn + (n^2 - m^2)\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}) \\
&- \frac{mn\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}(d^2 - \mathbf{c}^2) - \frac{n^2\mathbf{c}^2 + m^2 d^2}{m^2+n^2} \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{\mathscr{D}} \cdot \begin{vmatrix} (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \overline{\mathbf{c}} & (\overline{r}_1 - \overline{r}_0) \cdot \overline{d} \\ m_0 & n_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathscr{D}} \cdot \begin{vmatrix} -\overline{NN'} \cdot \overline{\mathbf{c}} & -\overline{NN'} \cdot \overline{d} \\ m_0 & n_0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (-n\overline{\mathbf{c}} + m\overline{d}) \cdot \overline{\mathbf{c}} & (-n\overline{\mathbf{c}} + m\overline{d}) \cdot \overline{d} \\ m_0 & n_0 \end{vmatrix} \\
&= \left[-nn_0\mathbf{c}^2 + (mn_0) \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d})\right] - \left[-(m_0 n) \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}) + mm_0 d^2\right] \\
&= (mn_0 + m_0 n) \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}) - nn_0\mathbf{c}^2 - mm_0 d^2 \\
&= \left( \frac{mn + m^2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} + \frac{mn - n^2\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} \right) \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}) \\
&- \frac{n^2 + mn\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}\mathbf{c}^2 - \frac{m^2 - mn\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} d^2 \\
&= \frac{2mn + (m^2 - n^2)\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2} \cdot (\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}) \\
&- \frac{mn\sqrt{m^2+n^2-1}}{m^2+n^2}(\mathbf{c}^2 - d^2) - \frac{n^2\mathbf{c}^2 + m^2 d^2}{m^2+n^2}. \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

Mai departe,

$$\alpha\overline{r}_i = \frac{1}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot \left\{ \left[m_i d^2 - n_i \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right)\right] \cdot \overline{\mathbf{c}} + \left[-m_i \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) + n_i \mathbf{c}^2\right] \cdot \overline{d} \right\},$$

unde $i \in \overline{0,1}$, respectiv

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \lambda \cdot \alpha\overline{r}_0$$

$$= \frac{1}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot \left\{ m_0 \left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2 + \lambda \left[ m_0 d^2 - n_0 \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) \right] \right\} \cdot \overline{\mathbf{c}}$$
$$+ \frac{1}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot \left\{ n_0 \left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2 + \lambda \left[ -m_0 \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) + n_0 \mathbf{c}^2 \right] \right\} \cdot \overline{d}.$$

*Coeficientul vectorului* $\frac{1}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot \overline{\mathbf{c}}$ este — via (5.33) —

$$\begin{aligned}
& m_0 \left[ \mathbf{c}^2 d^2 - \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right)^2 \right] \\
& + \left[ m_0 d^2 - n_0 \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) \right] \cdot \left[ (mn_1 + m_1 n) \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) - nn_1 \mathbf{c}^2 - mm_1 d^2 \right] \\
& = -mm_0 m_1 d^4 + m_0(1 - nn_1) d^2 \mathbf{c}^2 + \left[ m_0(mn_1 + m_1 n) + n_0 mm_1 \right] d^2 \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) \\
& + nn_0 n_1 \mathbf{c}^2 \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) - \left[ m_0 + n_0(mn_1 + m_1 n) \right] \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right)^2.
\end{aligned}$$

*Coeficientul vectorului* $\frac{1}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot \overline{d}$ este

$$\begin{aligned}
& n_0 \left[ \mathbf{c}^2 d^2 - \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right)^2 \right] \\
& + \left[ -m_0 \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) + n_0 \mathbf{c}^2 \right] \cdot \left[ (mn_1 + m_1 n) \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) - nn_1 \mathbf{c}^2 - mm_1 d^2 \right] \\
& = -nn_0 n_1 \mathbf{c}^4 + n_0(1 - mm_1) \mathbf{c}^2 d^2 + \left[ n_0(mn_1 + m_1 n) + m_0 nn_1 \right] \mathbf{c}^2 \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) \\
& + mm_0 m_1 d^2 \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right) - \left[ n_0 + m_0(mn_1 + m_1 n) \right] \left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right)^2.
\end{aligned}$$

**Lema 5.9.** *Sunt valabile egalităţile*

$$mm_0 m_1 = m_0(1 - nn_1) = \frac{m(1 - n^2)}{m^2 + n^2}.$$

*şi*

$$nn_0 n_1 = n_0(1 - mm_1) = \frac{n(1 - m^2)}{m^2 + n^2}.$$

*Demonstraţie.* Observăm că

$$mm_0 m_1 = m \frac{m^2 - n^2(m^2 + n^2 - 1)}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{m}{(m^2 + n^2)^2} \cdot (m^2 + n^2)(1 - n^2)$$

şi

$$\begin{aligned}
& m_0(1 - nn_1) \\
& = \frac{m - n\sqrt{m^2 + n^2 - 1}}{(m^2 + n^2)^2} \cdot \left[ m^2 + n^2 - \left( n^2 - mn\sqrt{m^2 + n^2 - 1} \right) \right] \\
& = \frac{m}{(m^2 + n^2)^2} \cdot \left[ m^2 - n^2(m^2 + n^2 - 1) \right] = \frac{m}{(m^2 + n^2)^2} \cdot (m^2 + n^2)(1 - n^2).
\end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. □

**Lema 5.10.** *Sunt valabile egalităţile*

$$m_0(mn_1+m_1n)+n_0mm_1=\frac{n(1+2m^2-n^2)}{m^2+n^2}$$

*şi*

$$m_0+n_0(mn_1+m_1n)=\frac{m(n^2-m^2+2)}{m^2+n^2},$$

*respectiv*

$$n_0(mn_1+m_1n)+m_0nn_1=\frac{m(1+2n^2-m^2)}{m^2+n^2}$$

*şi*

$$n_0+m_0(mn_1+m_1n)=\frac{n(m^2-n^2+2)}{m^2+n^2}.$$

*Demonstraţie.* Observăm că

$$\begin{aligned}
&m_0(mn_1+m_1n)+n_0mm_1\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\left\{\left(m-n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\left[m\left(n-m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+n\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]+m\left(n+m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\left\{\left(m-n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\left[2mn+(n^2-m^2)\sqrt{m^2+n^2-1}\right]\right.\\
&\left.+m\left[mn(m^2+n^2)+(m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\left\{\sqrt{m^2+n^2-1}\left[m(n^2-m^2)-2mn^2+m(m^2+n^2)\right]\right.\\
&\left.+2m^2n-n(n^2-m^2)(m^2+n^2-1)+m^2n(m^2+n^2)\right\}\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\left\{2m^2n+n(n^2-m^2)+(m^2+n^2)\left[m^2n-n(n^2-m^2)\right]\right\}\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\cdot\left[n(n^2+m^2)+(m^2+n^2)\left(2m^2n-n^3\right)\right].
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
&m_0+n_0(mn_1+m_1n)\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\left\{(m^2+n^2)\left(m-n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[m\left(n+m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\left(n-m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right.\\
&\left.\left.+n\left(n+m\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\left(m+n\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]\right\}\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\left\{m(m^2+n^2)-n(m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1}\right.\\
&+m\left[n^2-m^2(m^2+n^2-1)\right]+n\left[mn+(n^2+m^2)\sqrt{m^2+n^2-1}\right.\\
&\left.\left.+mn(m^2+n^2-1)\right]\right\}\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\left\{m(m^2+n^2)-n(m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1}\right.\\
&\left.+m(1-m^2)(m^2+n^2)+n\left[mn(m^2+n^2)+(m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\left\{m(m^2+n^2)-n(m^2+n^2)\sqrt{m^2+n^2-1}\right.\\
&\left.+(m^2+n^2)\left[m(1-m^2)+n\left(mn+\sqrt{m^2+n^2-1}\right)\right]\right\}\\
&=\frac{1}{m^2+n^2}\cdot\left(2m-m^3+mn^2\right).
\end{aligned}
$$

Justificarea s-a încheiat. □

În concluzie,

$$
\begin{aligned}
\overline{r}&=m'\cdot\overline{\mathbf{c}}+n'\cdot\overline{d}\\
&=\frac{1}{(m^2+n^2)\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\left\{m(n^2-1)d^2(d^2-\mathbf{c}^2)+\left(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\right)\left[n(1-m^2)\mathbf{c}^2\right.\right.\\
&+\ \left.\left.n(1+2m^2-n^2)d^2-m(n^2-m^2+2)\left(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\right)\right]\right\}\cdot\overline{\mathbf{c}}\\
&+\ \frac{1}{(m^2+n^2)\left|\overline{\mathbf{c}}\times\overline{d}\right|^2}\left\{n(m^2-1)\mathbf{c}^2(\mathbf{c}^2-d^2)+\left(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\right)\left[m(1+2n^2-m^2)\mathbf{c}^2\right.\right.\\
&+\ \left.\left.m(1-n^2)d^2-n(m^2-n^2+2)\left(\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{d}\right)\right]\right\}\cdot\overline{d}.
\end{aligned}
$$

În cazul particular al cercului, vezi (4.6), remarcăm că

$$m'=n'=0,$$

deci $P'=C$.

În cazul particular al razelor conjugate ortogonale,

$$\overline{\mathbf{c}}=\overline{a},\qquad \overline{d}=\overline{b},$$

obţinem — via (2.5), (2.7) —

$$\begin{aligned}\overline{r} &= \frac{a^2-b^2}{m^2+n^2}\cdot\left[-\frac{m(n^2-1)}{a^2}\cdot\overline{a}+\frac{n(m^2-1)}{b^2}\cdot\overline{b}\right]\\ &= \frac{e^2}{m^2+n^2}\cdot\left[-m(n^2-1)\cdot\overline{a}+\frac{n(m^2-1)}{1-e^2}\cdot\overline{b}\right].\end{aligned}$$

## 5.8 Picioarele normalelor la elipsă duse dintr-un punct interior $P$. Hiperbola echilateră a lui Apollonius

Fie $P \in E_2$ un punct *nesituat pe axele de simetrie ale elipsei*. Astfel,

$$\overline{CP} = m\cdot\overline{a}+n\cdot\overline{b} = (ma)\cdot\overline{i}+(nb)\cdot\overline{j},$$

unde $m\cdot n \neq 0$.

Introducem numerele $p$, $q$, cu formulele

$$p = -\frac{ma^3}{c^2}, \qquad q = \frac{nb^3}{c^2}, \tag{5.36}$$

şi hiperbola echilateră $\mathscr{H}_{pq}$, de ecuaţie carteziană[18]

$$(x+c+p)(y+q)-pq = 0.$$

**Lema 5.11.** *Fie* $\mu \in \mathbb{R}\setminus\left\{-a^2, -b^2\right\}$ *şi* $Q = Q(\mu) \in E_2$ *cu*

$$\overline{CQ} = \frac{ma^2}{\mu+a^2}\cdot\overline{a}+\frac{nb^2}{\mu+b^2}\cdot\overline{b}. \tag{5.37}$$

*Atunci,* $P, Q \in \mathscr{H}_{pq}$.

*Demonstraţie.* Observăm că $P = Q(0)$.

Au loc relaţiile

$$x_Q+c = \frac{ma^3}{\mu+a^2}, \qquad y_Q = \frac{nb^3}{\mu+b^2}$$

şi

$$\begin{aligned}&(x_Q+c+p)(y_Q+q)-pq = \frac{ma^3(c^2-\mu-a^2)}{c^2(\mu+a^2)}\cdot\frac{nb^3(c^2+\mu+b^2)}{c^2(\mu+b^2)}+\frac{mna^3b^3}{c^4}\\ &= \frac{mna^3b^3}{c^4}\left[\frac{c^2-\mu-a^2}{\mu+a^2}\cdot\frac{c^2+\mu+b^2}{\mu+b^2}+1\right] = \frac{mna^3b^3}{c^4}\left[\frac{-(\mu+b^2)}{\mu+a^2}\cdot\frac{\mu+a^2}{\mu+b^2}+1\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

[18] Vezi secţiunea 2.5.

Justificarea s-a încheiat. $\square$

*Presupunem că* $m^2+n^2<1$.
Reciproca bazei $\mathscr{P}=\{\overline{a},\overline{b}\}$ este baza $\mathscr{P}^\star=\{\overline{A},\overline{B}\}$, unde

$$\overline{A}=\frac{1}{a}\cdot\overline{i}=\frac{1}{a^2}\cdot\overline{a},\qquad \overline{B}=\frac{1}{b}\cdot\overline{j}=\frac{1}{b^2}\cdot\overline{b}. \tag{5.38}$$

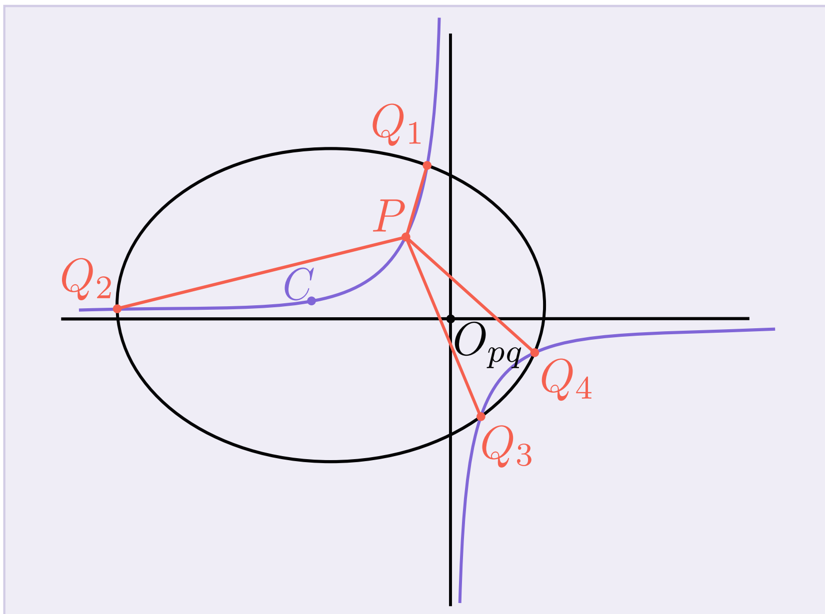


**Fig. 5.8** Dacă $Q_1$–$Q_4$ sunt picioarele normalelor la elipsă duse din punctul interior $P$, atunci ele se găsesc pe o hiperbolă echilateră care trece prin punctele $P$, $C$ şi ale cărei asimptote sunt paralele cu axele de simetrie ale elipsei.

Fie $Q$ un *prezumtiv* picior de normală, dusă din $P$, la elipsă. Atunci, există $\varphi\in[0,2\pi)$ pentru care

$$\begin{cases}\overline{CQ}=\cos\varphi\cdot\overline{a}+\sin\varphi\cdot\overline{b},\\ \alpha\overline{CQ}=\cos\varphi\cdot\overline{A}+\sin\varphi\cdot\overline{B}\end{cases}$$

şi $\mu\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\overline{CP}=\overline{CQ}+\mu\cdot\alpha\overline{CQ}.$$

Obţinem

$$\overline{CP} = m \cdot \overline{a} + n \cdot \overline{b} = \cos\varphi \left(1 + \frac{\mu}{a^2}\right) \cdot \overline{a} + \sin\varphi \left(1 + \frac{\mu}{b^2}\right) \cdot \overline{b},$$

respectiv

$$\begin{cases} m = \left(1 + \frac{\mu}{a^2}\right) \cdot \cos\varphi, \\ n = \left(1 + \frac{\mu}{b^2}\right) \cdot \sin\varphi. \end{cases} \tag{5.39}$$

În particular, $\mu \notin \{-a^2, -b^2\}$ şi *are loc reprezentarea (5.37).*

**Lema 5.12.** *Ecuaţia algebrică în necunoscuta* $\mu$*,*

$$\begin{aligned} &\mu^4 + 2(a^2+b^2) \cdot \mu^3 \\ &+ \left[(a^2+b^2)^2 + 2a^2b^2 - (m^2a^4 + n^2b^4)\right] \cdot \mu^2 \\ &+ 2a^2b^2 \left[a^2 + b^2 - (m^2a^2 + n^2b^2)\right] \cdot \mu \\ &+ a^4b^4(1 - m^2 - n^2) = 0, \end{aligned} \tag{5.40}$$

*admite cel puţin două soluţii reale. Una*[19] *dintre soluţii se găseşte în* $(-b^2, 0)$.

*Demonstraţie.* Reorganizăm ecuaţia sub forma

$$m^2a^4(b^2+\mu)^2 + n^2b^4(a^2+\mu)^2 = (a^2+\mu)^2(b^2+\mu)^2.$$

Cum $m \cdot n \neq 0$, *toate soluţiile se află în* $\mathbb{C} \setminus \{-a^2, -b^2\}$.

Astfel, ecuaţia devine

$$(f(\mu) =) \qquad \left(\frac{ma^2}{a^2+\mu}\right)^2 + \left(\frac{nb^2}{b^2+\mu}\right)^2 = 1.$$

Remarcăm că $f(0) < 1$ şi $\lim\limits_{\mu \searrow -b^2} f(\mu) = +\infty$, deci *există soluţia* $\mu_0 \in (-b^2, 0)$ *a ecuaţiei* $f(\mu) = 1$.

Ecuaţia (5.40), având coeficienţi reali, *va mai avea încă (cel puţin) o soluţie* $\mu_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2\}$.

Identitatea

$$\overline{CQ(\mu_0)} - k \cdot \overline{CP} = m \left(\frac{a^2}{\mu_0 + a^2} - k\right) \cdot \overline{a} + n \left(\frac{b^2}{\mu_0 + b^2} - k\right) \cdot \overline{b} \neq 0, \qquad k \in \mathbb{R},$$

arată că *punctele* $C$, $P$, $Q(\mu_0)$ *nu sunt coliniare*. Conform discuţiei din secţiunea 2.5, ele determină — *unic* — hiperbola $\mathscr{H}_{pq}$ dată de relaţiile (5.36).

Hiperbola intersectează elipsa în cel puţin două puncte, $Q(\mu_0)$, $Q(\mu_1)$. *Relaţia biunivocă* dintre punctele de intersecţie cu elipsa ale hiperbolei şi soluţiile reale ale ecuaţiei (5.40) este dată de reprezentarea (5.37).

Justificarea s-a încheiat. □

[19] Vezi [Apollonius, V.51, 52, 62, 63] în [7, pag. 168, 185].

Conica $\mathscr{H}_{pq}$ se mai numeşte şi *hiperbola lui Apollonius*, generată de punctul interior $P$, conform [1, pag. 114].

## 5.9 Elipsa înscrisă (într-un triunghi) a lui Jakob Steiner

Aici, originea $O$ a reperului $\mathscr{R}$ este *un punct oarecare* din $E_2$.

Considerăm triunghiul $A_1B_1C_1$, cu centrul de greutate $G$ şi mijloacele $A_2$, $B_2$, $C_2$ ale laturilor $B_1C_1$, $C_1A_1$, respectiv $A_1B_1$, astfel încât *perechea* $\{\overrightarrow{GA_1}, \overrightarrow{GB_1}\}$ *să fie pozitiv orientată*. Adică,

$$\left(\overline{GA_1}, \overline{GB_1}, \overline{k}\right) > 0.$$

Ne interesează *prezumtiva elipsă* care trece prin punctele $A_1$, $B_1$, $C_1$, are centrul de simetrie $G$ şi tangenta prin $A_1$ paralelă cu dreapta $B_1C_1$.

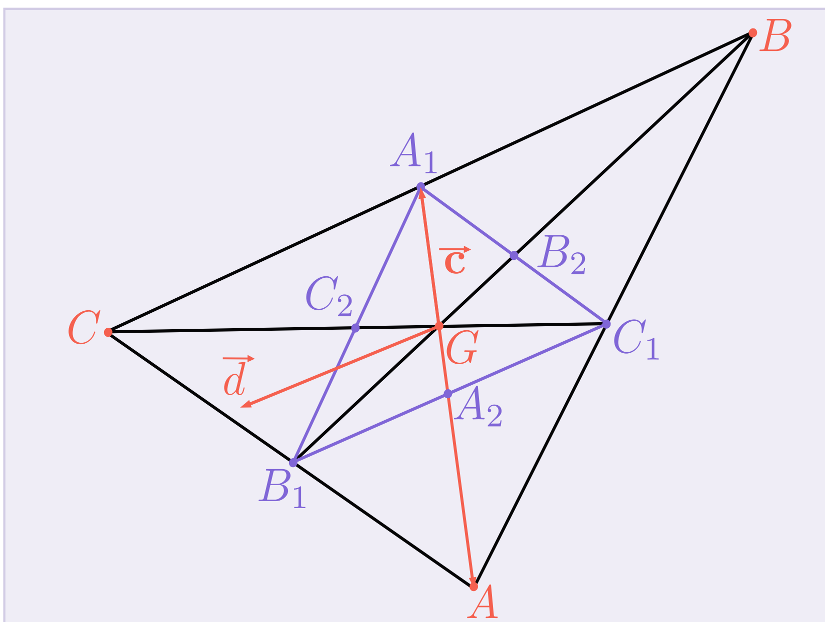


**Fig. 5.9** Mijloacele de laturi $A_1, B_1, C_1$ sunt punctele de tangenţă cu laturile triunghiului $ABC$ ale unei elipse având drept centru de simetrie centrul de greutate $G$. Elipsa este determinată de perechea de raze conjugate $\{\vec{\mathbf{c}}, \vec{d}\} \subset T_G\mathbb{R}^2$, unde $\overline{\mathbf{c}} = \overline{GA_1}$ şi $\overline{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\overline{GA_1} + 2 \cdot \overline{GB_1}\right)$.

Fie

$$\overline{r}_{A_1} = \overline{OA_1}, \quad \overline{r}_{B_1} = \overline{OB_1}, \quad \overline{r}_{C_1} = \overline{OC_1}, \quad \overline{r}_G = \overline{OG}.$$

Au loc relaţiile

$$\overline{r}_G = \frac{1}{3} \cdot (\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{B_1} + \overline{r}_{C_1}),$$

respectiv

$$\overline{GA_1} = \overline{r}_{A_1} - \overline{r}_G = \frac{1}{3} [2\overline{r}_{A_1} - (\overline{r}_{B_1} + \overline{r}_{C_1})]$$

şi omoloagele acesteia.

Deducem că — vezi [13, pag. 130] —

$$\overline{GA_1} + \overline{GB_1} + \overline{GC_1} = 0$$

şi

$$\begin{aligned} \overline{GA_1} \times \overline{GB_1} &= \overline{GB_1} \times \overline{GC_1} = \overline{GC_1} \times \overline{GA_1} \\ &= \frac{1}{3} (\overline{r}_{A_1} \times \overline{r}_{B_1} + \overline{r}_{B_1} \times \overline{r}_{C_1} + \overline{r}_{C_1} \times \overline{r}_{A_1}), \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} &\overline{r}_{A_1} \times \overline{r}_{B_1} + \overline{r}_{B_1} \times \overline{r}_{C_1} + \overline{r}_{C_1} \times \overline{r}_{A_1} \\ &= \overline{A_1B_1} \times \overline{B_1C_1} = \overline{B_1C_1} \times \overline{C_1A_1} = \overline{C_1A_1} \times \overline{A_1B_1}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Introducem vectorii

$$\overline{\mathbf{c}} = \overline{GA_1}, \qquad \overline{d} \parallel \overline{C_1B_1}$$

cerând ca *perechea* $\{\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{d}\} \subset T_G\mathbb{R}^2$ *să fie pozitiv orientată*. Dacă elipsa căutată ar exista, atunci coarda $B_1C_1$ a acesteia ar fi înjumătăţită de către dreapta $A_1G$, deci ar exista numerele reale $m$, $n$ cu următoarele proprietăţi,

$$\begin{cases} \overline{GB_1} = m \cdot \overline{\mathbf{c}} + n \cdot \overline{d}, \\ \overline{GC_1} = m \cdot \overline{\mathbf{c}} - n \cdot \overline{d}, \end{cases}$$

respectiv

$$m^2 + n^2 = 1.$$

Cum $\overline{GA_2} = -\frac{\overline{\mathbf{c}}}{2}$, obţinem $m = -\frac{1}{2}$ şi $n^2 = \frac{3}{4}$.

Astfel, pentru $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *definim* vectorul $\overline{d}$ cu formula

$$\overline{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{GA_1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{GB_1}.$$

**Lema 5.13.** *Elipsa de raze conjugate* $\{\overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{d}\} \subset T_G\mathbb{R}^2$ *are tangenta în punctul* $B_1$ *paralelă cu dreapta* $C_1A_1$ *şi tangenta în punctul* $C_1$ *paralelă cu dreapta* $A_1B_1$.

*Demonstraţie.* Pe baza relaţiilor (5.8), introducem punctele $P, P'$, cu $P = B_1$. Avem

$$\begin{cases} \overline{GB_1} = -\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathbf{c}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{d}, \\ \overline{GP'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{\mathbf{c}} - \frac{1}{2}\cdot\overline{d}, \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \overline{A_1C_1} &= \overline{GC_1} - \overline{GA_1} = -\frac{3}{2}\overline{\mathbf{c}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{d} \\ &= \sqrt{3}\cdot\overline{GP'}. \end{aligned}$$

Astfel, tangenta prin $P$ la elipsă este paralelă cu dreapta $A_1C_1$.

Mai departe, redefinim punctele $P, P'$, cu $P = C_1$. Atunci,

$$\begin{cases} \overline{GC_1} = -\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathbf{c}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{d}, \\ \overline{GP'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{\mathbf{c}} - \frac{1}{2}\cdot\overline{d}, \end{cases}$$

respectiv

$$\overline{A_1B_1} = \overline{GB_1} - \overline{GA_1} = -\sqrt{3}\cdot\overline{GP'}.$$

Justificarea s-a încheiat. □

*Paralelele* duse prin punctele $C_1, A_1, B_1$ la dreptele $A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1$ se intersectează în punctele $A$, $B$, respectiv $C$.

**Lema 5.14.** *Dreptele* $A_1A$, $B_1B$, $C_1C$ *sunt concurente în punctul* $G$.

*Demonstraţie.* În contextul secţiunii 1.3, au loc relaţiile

$$\begin{aligned} \overline{GA} &= \overline{GB_1} + \lambda\cdot\overline{A_1C_1} = \overline{a} + \lambda\cdot\overline{u} \\ &= \overline{GC_1} + \mu\cdot\overline{A_1B_1} = \overline{b} + \mu\cdot\overline{v}, \end{aligned}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, respectiv

$$\overline{b} - \overline{a} = \overline{B_1C_1}, \qquad \overline{u}\times\overline{v} = -\overline{C_1A_1}\times\overline{A_1B_1}.$$

Via (5.41), observăm că

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\left(\overline{b}-\overline{a}, \overline{v}, \overline{u}\times\overline{v}\right)}{|\overline{u}\times\overline{v}|^2} = -\frac{\left(\overline{B_1C_1}, \overline{A_1B_1}, \overline{C_1A_1}\times\overline{A_1B_1}\right)}{\left|\overline{C_1A_1}\times\overline{A_1B_1}\right|^2} \\ &= \frac{\left(\overline{A_1B_1}\times\overline{B_1C_1}\right)\cdot\left(\overline{C_1A_1}\times\overline{A_1B_1}\right)}{\left|\overline{C_1A_1}\times\overline{A_1B_1}\right|^2} = 1 \end{aligned}$$

şi

$$\mu = \frac{\left(\overline{b}-\overline{a},\overline{u},\overline{u}\times\overline{v}\right)}{\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|^2} = -\frac{\left(\overline{B_1C_1},\overline{A_1C_1},\overline{C_1A_1}\times\overline{A_1B_1}\right)}{\left|\overline{C_1A_1}\times\overline{A_1B_1}\right|^2} = 1.$$

Am ajuns la

$$\begin{aligned}
\overline{GA} &= \overline{GB_1}+\overline{A_1C_1}\\
&= \frac{1}{3}\left[2\overline{r}_{B_1}-\left(\overline{r}_{A_1}+\overline{r}_{C_1}\right)\right]+\left(\overline{r}_{C_1}-\overline{r}_{A_1}\right) = -\frac{4}{3}\overline{r}_{A_1}+\frac{2}{3}\left(\overline{r}_{B_1}+\overline{r}_{C_1}\right)\\
&= -\frac{4}{3}\left(\overline{GA_1}-\overline{GO}\right)+\frac{2}{3}\left(\overline{GB_1}+\overline{GC_1}-2\overline{GO}\right)\\
&= -\frac{4}{3}\overline{GA_1}+\frac{2}{3}\left[\overline{GB_1}+\left(-\overline{GA_1}-\overline{GB_1}\right)\right] = -2\cdot\overline{GA_1}.
\end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. □

Elipsa înscrisă în triunghiul $ABC$, circumscrisă triunghiului median[20] $A_1B_1C_1$ şi având centrul de greutate $G$ drept centru de simetrie poartă numele de *elipsa înscrisă* (în triunghiul $ABC$) *a lui Jakob Steiner*, conform [3, pag. 381], [1, pag. 52].

[20] Vezi [13, pag. 174].

# Anexa A
# Proiecţia ortogonală a unei secţiuni conice în planul bazei

Apollonius introduce elipsa ca *secţiune* printr-un con *oarecare* [7, pag. 1]. În cele ce urmează, privind conul *de deasupra*[1], refacem construcţia lui Apollonius.

## A.1 Probleme ajutătoare

Folosim Figura A.1.

**Lema A.1.** *Fie dreptele $AC, AX, AE$, coplanare, în ordinea enumerării. Fie punctele $X_1 \in (CE)$, $\{\zeta\} = (X_1E) \cap (XA)$, $\varphi \in (CA)$, $\psi \in (EA)$, $Y \in (\zeta A)$, $\{Z\} = (\varphi\psi) \cap X_1A$ şi $\{\tau\} = (Z\psi) \cap (\zeta A)$. Dacă $XX_1 \parallel YZ$ şi $X_1\zeta \parallel Z\tau$, atunci $\triangle XCE \sim \triangle Y\varphi\psi$.*

*Demonstraţie.* Observăm că $\triangle YZ\tau \sim \triangle XX_1\zeta$, deci $\frac{\tau Y}{\zeta X} = \frac{Z\tau}{X_1\zeta}$.

Cum $\varphi\psi \parallel CE$, avem

$$\frac{Z\tau}{X_1\zeta} = \frac{AZ}{AX_1} = \frac{A\varphi}{AC} = \frac{A\tau}{A\zeta},$$

de unde, aplicând regulile de calcul pentru proporţii derivate, obţinem că

$$\frac{Z\tau}{X_1\zeta} = \frac{A\tau + \tau Y}{A\zeta + \zeta X} = \frac{AY}{AX}.$$

Am ajuns la

$$\frac{A\varphi}{AC} = \frac{Z\tau}{X_1\zeta} = \frac{AY}{AX},$$

[1] Programul de grafică tridimensională *Blender* utilizează acest tip de reprezentare ortografică, vezi link-ul [16].

deci $Y\varphi \parallel XC$.

În sfârşit, cum $\varphi\psi \parallel CE$, $\frac{A\varphi}{AC} = \frac{A\psi}{AE}$, deci $\frac{A\psi}{AE} = \frac{AY}{AX}$, de unde concludem că $Y\psi \parallel XE$. $\square$

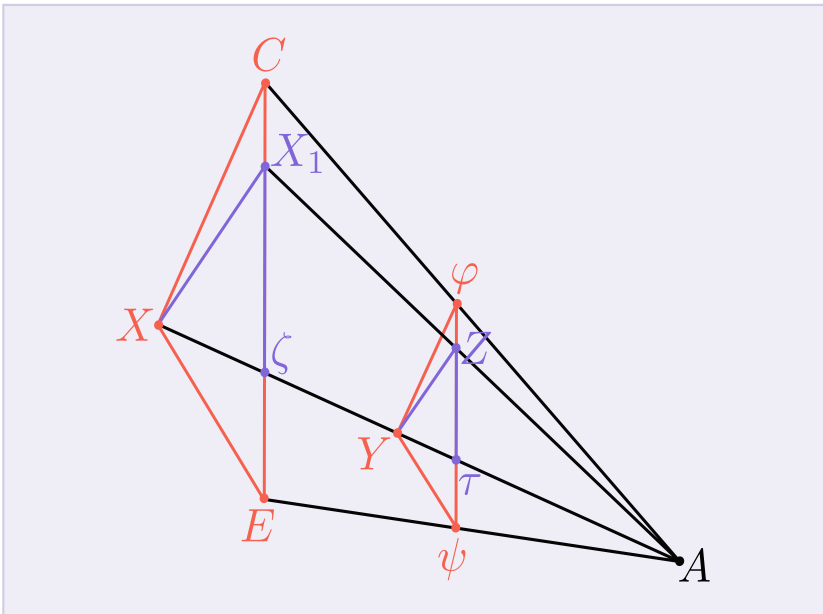


**Fig. A.1** Dacă dreptele $XX_1$ şi $YZ$, respectiv $X_1\zeta$ şi $Z\tau$ sunt paralele, atunci triunghiurile $XCE$ şi $Y\varphi\psi$ sunt asemenea.

Folosim Figura A.2.

**Lema A.2.** *Într-un plan, fie triunghiul $XCE$ şi punctul $A$ exterior lui. Fie $\{\zeta\} = (CE) \cap (XA)$, $X_1 \in (C\zeta)$, $O \in (X_1\zeta)$.*

i) *Fie punctele $Z \in (X_1A)$, $Y \in (\zeta A)$ astfel ca $XX_1 \parallel YZ$. O dreaptă trecând prin $Z$ intersectează segmentul $(OA)$ în $P$ şi semidreapta $(CE$ în $F$, cu $E \in (\zeta F)$. Paralelele duse prin $O$, $P$ la dreapta $X_1X$ intersectează segmentul $(XF)$ în $X_0$, respectiv în $P_0$, unde $P_0 \in (X_0F)$. Fie $\{X^1\} = PP_0 \cap AX_0$. Atunci, punctele $F, X^1, Y$ sunt coliniare.*

ii) *fie $F \in (\zeta E$, cu $E \in (\zeta F)$. Paralela prin $O$ la dreapta $X_1X$ intersectează segmentul $(XF)$ în $X_0$. Fie $P_0 \in (X_0F)$. Paralela prin $P_0$ la dreapta $XX_1$ taie segmentul $(X_0A)$ în $X^1$ şi segmentul $(OA)$ în $P$. Fie $\{Y\} = FX^1 \cap (\zeta A)$. Paralela prin $Y$ la $XX_1$ intersectează segmentul $(X_1A)$ în $Z$. Atunci, punctele $F, P, Z$ sunt coliniare.*

*Demonstraţie.* **Partea i)** Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul $X_1AO$ pentru transversala $ZPF$,

$$\frac{FX_1}{FO} \cdot \frac{OP}{PA} \cdot \frac{AZ}{ZX_1} = 1.$$

Cum $X_0O \parallel XX_1$, avem $\frac{FX_1}{FO} = \frac{FX}{FX_0}$. Apoi, cum $X_0O \parallel X^1P$, obţinem $\frac{OP}{PA} = \frac{X_0X^1}{X^1A}$. În sfârşit, cum $XX_1 \parallel YZ$, $\frac{AY}{YX} = \frac{AZ}{ZX_1}$.

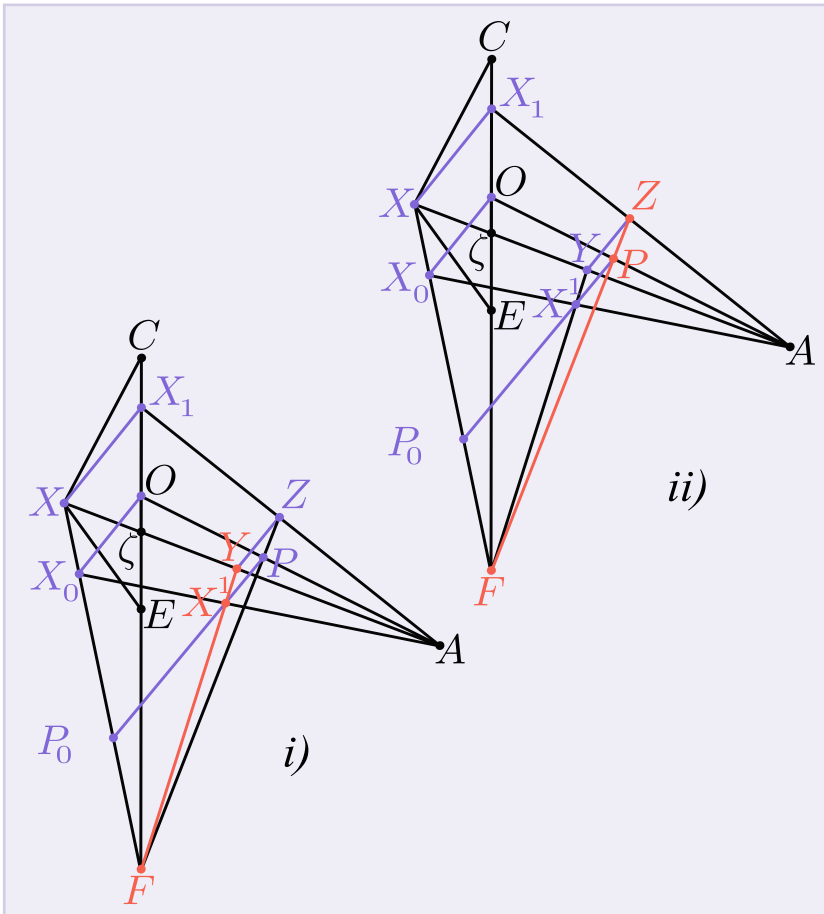


**Fig. A.2** Dacă dreptele $XX_1, X_0O, YZ, P_0P$ sunt paralele, atunci punctele $F, X^1, Y$ sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele $F, P, Z$ sunt coliniare.

Am ajuns la

$$\frac{FX}{FX_0} \cdot \frac{X_0X^1}{X^1A} \cdot \frac{AY}{YX} = 1.$$

Justificarea s-a încheiat. $\square$

## A.2 Construcţia secţiunii circulare

Pentru a obţine formula elipsei, plecând de la o *caracterizare a cercului*[2], Apollonius construieşte (încă) o secţiune circulară, paralelă cu baza conului[3], care să treacă[4] prin punctul $Y$, oarecare, al elipsei. Folosim Figura A.3.

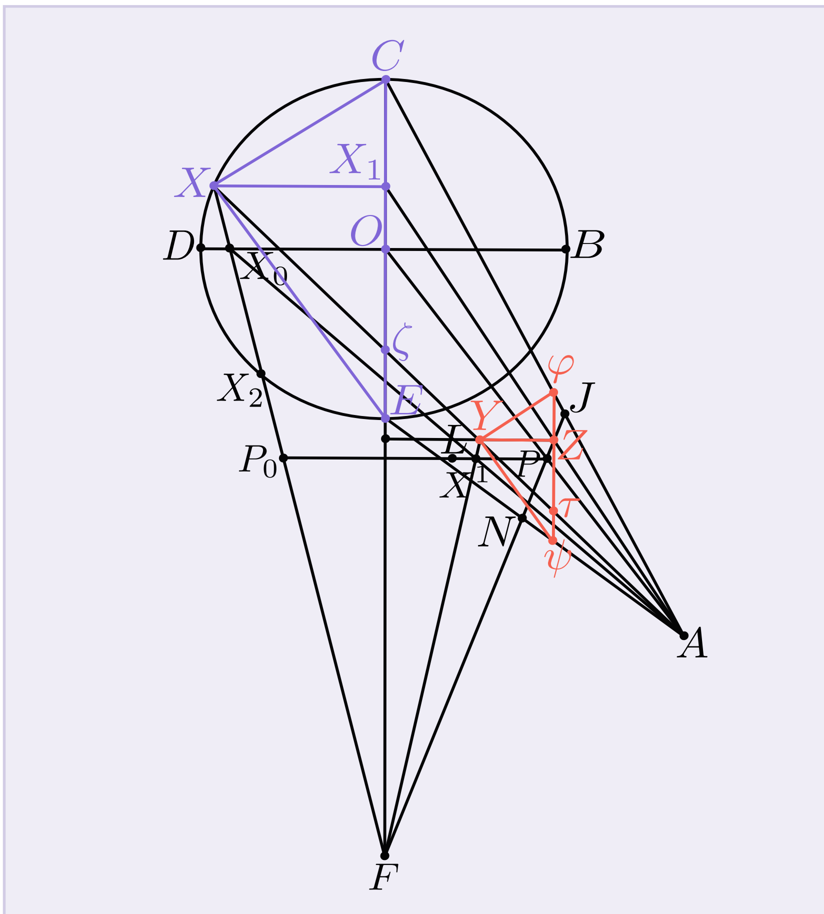


**Fig. A.3** Triunghiul $Y\varphi\psi$ este dreptunghic. Cercul circumscris lui reprezintă secţiunea circulară (proiectată), a conului, dusă prin punctul $Y$. Proiecţia secţiunii eliptice este dată de elipsa de diametru $JN$ care trece prin punctele $L, Y$. Dreapta $YZ$ constituie proiecţia în planul bazei conului a dreptei de intersecţie dintre planul secţiunii circulare şi cel al secţiunii eliptice.

[2] Adică, relaţia din *teorema înălţimii*, a unui triunghi dreptunghic.

[3] [Apollonius, I.4] în [7, pag. 2].

[4] Vezi [7, pag. 7].

**Lema A.3.** *Într-un plan, fie $CE$, $DB$ diametre perpendiculare ale unui cerc şi punctele $F, A$, exterioare acestuia, cu $F \in (CE$. Fixăm punctul $P \in (OA)$, exterior cercului. Fie $\{J\} = FP \cap CA$, $\{N\} = FP \cap EA$. Fie punctul $X$, oarecare, pe arcul mic $DC$. Fie $X_1$ proiecţia sa ortogonală pe $CO$ şi $\{X_0\} = FX \cap (DO)$. Paralela la $DB$, dusă prin $P$, întâlneşte segmentul $(FX)$ în $P_0$. Fie $\{X^1\} = X_0A \cap PP_0$, $\{Y\} = FX^1 \cap XA$. Paralela la $DB$, dusă prin $Y$, taie dreapta $X_1A$ în $Z$. Paralela la $CE$, dusă prin $Z$, întâlneşte segmentele $AC, AE$ în $\varphi$, respectiv în $\psi$. Atunci, triunghiul $Y\varphi\psi$ este dreptunghic.*

*Demonstraţie.* Fie $\{\zeta\} = XA \cap CF$. Observăm că dreptele $XX_1$, $X_0O$, $YZ$, $PP_0$ sunt paralele. Conform Lemei A.2, partea ii), *punctele $F, P, Z$ sunt coliniare*, adică $\{Z\} = FP \cap X_1A$.

Fie $\{\tau\} = \varphi\psi \cap XA$. Remarcăm că

$$\triangle XX_1\zeta \sim \triangle YZ\tau.$$

Pe baza Lemei A.1, $\triangle XCE \sim \triangle Y\varphi\psi$. Justificarea s-a încheiat. □

## A.3 Calculul ecuaţiei algebrice a secţiunii eliptice

Folosim Figura A.4.

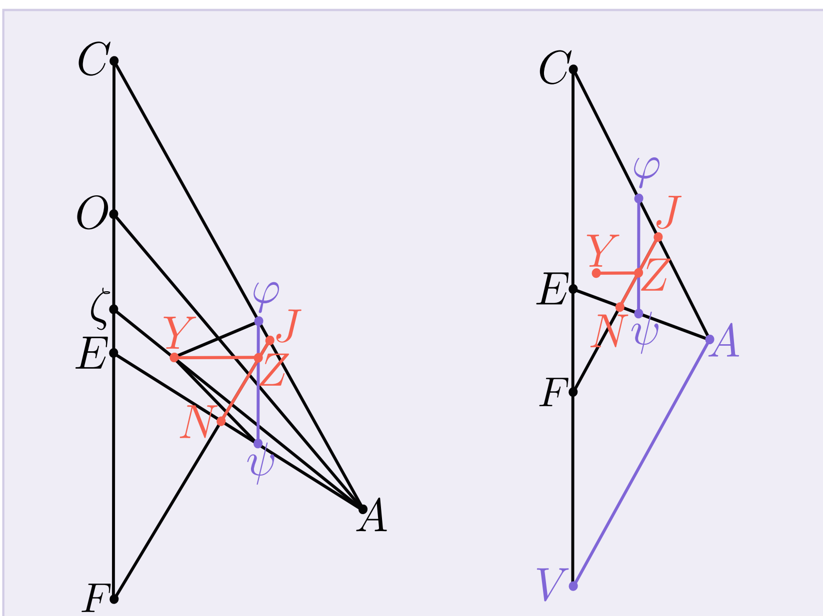


**Fig. A.4** Ecuaţia elipsei este $\frac{YZ^2}{NZ \cdot ZJ} = k$, unde constanta are valoarea $k = \frac{CV \cdot EV}{AV^2}$. Aici, $AV \parallel JF$.

**Lema A.4.** *Paralela prin $A$ la dreapta $FJ$ intersectează semidreapta $(EF$ în $V$, cu $F \in (EV)$. Atunci,*

$$YZ^2 = JZ \cdot ZN \cdot \frac{CV \cdot EV}{AV^2}.$$

*Demonstraţie.* Din teorema înălţimii, aplicată în triunghiul dreptunghic $Y\varphi\psi$, avem $YZ^2 = \varphi Z \cdot Z\psi$.

Cum $\triangle JZ\varphi \sim \triangle AVC$, $\frac{JZ}{AV} = \frac{\varphi Z}{CV}$, deci $\frac{JZ}{\varphi Z} = \frac{AV}{CV}$.

Mai departe, cum $\triangle ZN\psi \sim \triangle FNE \sim \triangle VAE$, $\frac{ZN}{AV} = \frac{Z\psi}{VE}$, deci $\frac{NZ}{\psi Z} = \frac{AV}{EV}$.

În concluzie, $\varphi Z \cdot Z\psi = \frac{CV \cdot EV}{AV^2} \cdot (JZ \cdot NZ)$. $\square$

Folosim Figura A.5.

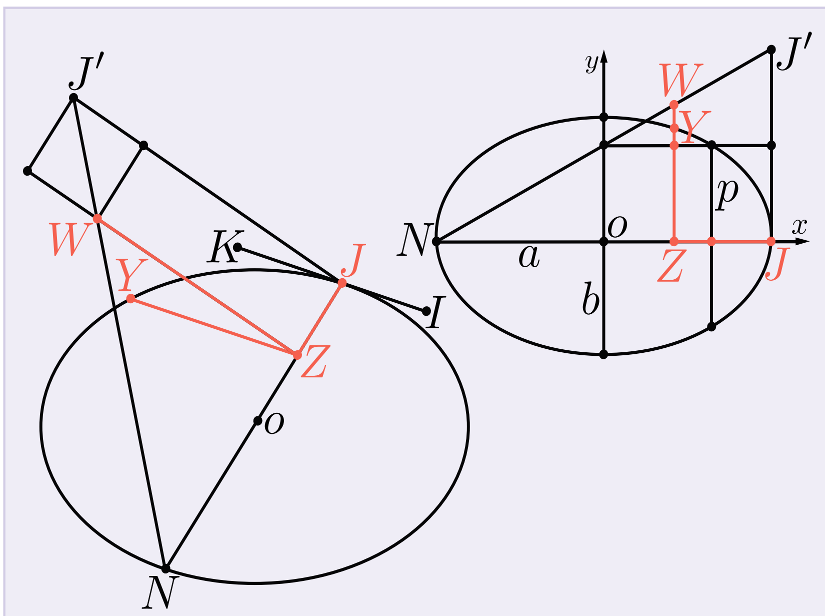


**Fig. A.5** Ecuaţia elipsei are, în concepţia lui Apollonius, forma $YZ^2 = JZ \cdot WZ$, unde $JJ' \parallel WZ \perp NJ$, $\frac{JJ'}{NJ} = \frac{CV \cdot EV}{AV^2}$, $KI$ este tangenta la elipsa de centru $o$ în punctul $J$ şi $YZ \parallel KI$. În sistemul de coordonate cartezian $Oxy$, $JJ' = 2p$ şi $y^2 = (a^2 - x^2) \cdot \frac{b^2}{a^2}$, unde $Y = Y(x,y)$. Vezi şi [7, pag. lxxx, lxxxiii].

**Lema A.5.** (Ecuaţia[5] elipsei) *Pe perpendiculara dusă prin $J$ la dreapta $NJ$, alegem punctul $J'$ astfel încât*

$$\frac{JJ'}{NJ} = \frac{CV \cdot EV}{AV^2}.$$

[5] [Apollonius, I.13] în [7, pag. 11].

*Dreapta $NJ'$ taie în punctul $W$ paralela trasată prin $Z$ la dreapta $JJ'$. Atunci,*

$$YZ^2 = JZ \cdot ZW.$$

*Demonstraţie.* Cum $ZW \parallel JJ'$, $\frac{ZW}{JJ'} = \frac{NZ}{NJ}$, deci

$$JZ \cdot ZW = (JZ \cdot NZ) \cdot \frac{JJ'}{NJ}.$$

Concluzia rezultă din Lema A.4. □

Folosim Figura A.6.

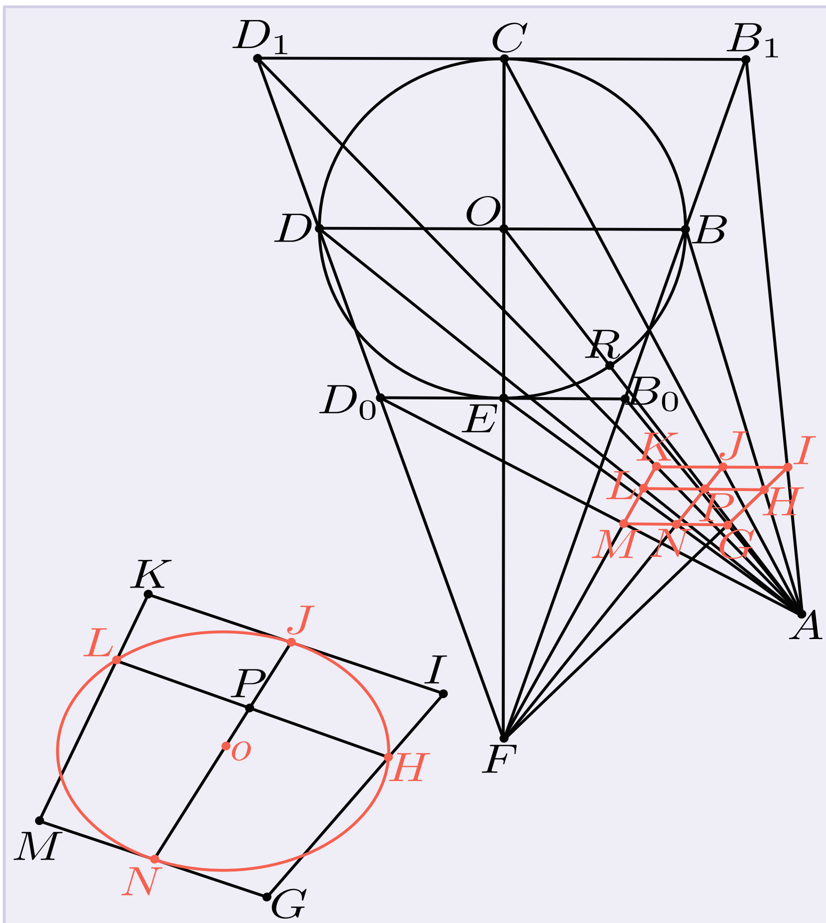


**Fig. A.6** Proiecţia elipsei în planul bazei conului este o elipsă cu centrul de simetrie $o$, de diametru $JN$. Dreptele $KI$, $MG$ îi sunt tangente elipsei în punctele $J$, respectiv $N$. În plus, $LH \parallel KI$.

**Lema A.6.** *Fie*[6] $J \in (AC)$ *şi* $\{P\} = FJ \cap OA$, $\{N\} = EA \cap FJ$. *Paralela la* $DB$, *dusă prin* $P$, *intersectează dreptele* $DA, BA$ *în* $L$, *respectiv în* $H$. *Dreptele* $FL, FH$ *taie paralela prin* $J$ *la* $DB$ *în punctele* $K, I$ *iar paralela prin* $N$ *la* $DB$ *în punctele* $M, G$. *Atunci,*

$$KJ \equiv JI, \quad LP \equiv PH, \quad MN \equiv NG.$$

*Demonstraţie.* În triunghiul $DBA$, cum $LH \parallel DB$, avem $\frac{LP}{DO} = \frac{AP}{AO} = \frac{PH}{OB}$. Din $DO \equiv BO$ rezultă că $LP \equiv PH$.

În triunghiul $KIF$, cum $LH \parallel MG \parallel KI$, avem $\frac{FN}{FP} = \frac{MN}{LP} = \frac{NG}{PH}$, deci $MN \equiv NG$. De asemeni, $\frac{FP}{FJ} = \frac{LP}{KJ} = \frac{PH}{JI}$, de unde $KJ \equiv JI$.

Justificarea s-a încheiat. □

Fiind împărţită în jumătăţi de către diametrul $NJ$, coarda $LH$ este paralelă cu diametrul conjugat acestuia, deci *dreptele* $KI, MG$ *îi sunt tangente elipsei în punctele* $J$, *respectiv* $N$.

## A.4 Estimări auxiliare

În Figura A.6, fie $\rho$ raza cercului, $\{R\} = \mathscr{C}(O,\rho) \cap (OA$ şi $\alpha = m(\angle AOF) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Introducem numerele $\mu > \nu > 0$, $\lambda \in (0,1)$ pentru care

$$FE = \mu \cdot \rho, \quad AR = \nu \cdot \rho, \quad \lambda = \frac{AJ}{AC},$$

respectiv

$$m_1 = \frac{(1+\nu)(1-\lambda)}{1+\lambda+\mu}, \quad m_2 = \sqrt{m_1^2 - 2m_1 \cos\alpha + 1}.$$

Au loc relaţiile — $\overline{JN} = 2 \cdot \overline{\mathbf{c}}$ iar vectorii $\overline{KI}, \overline{d}$ sunt coliniari —

$$\begin{cases} 2 \cdot \mathbf{c} = NJ = 2\frac{\lambda(1+\lambda+\mu)m_2}{\mu+2\lambda} \cdot \rho, \\ \frac{d^2}{\mathbf{c}^2} = \frac{CV \cdot EV}{AV^2} = \frac{(2+\mu)(2\lambda+\mu)}{(1+\lambda+\mu)^2 m_2^2}, \\ \tan(\angle LPN) = \frac{1-m_1\cos\alpha}{m_1 \sin\alpha}, \end{cases}$$

unde $\angle LPN = \angle\left(\overline{\mathbf{c}}, \overline{d}\right)$. Aici, $JJ' = 2 \cdot \frac{d^2}{\mathbf{c}}$.

[6] Secţiunea practicată de Apollonius *nu este*, în mod necesar, *perpendiculară* pe generatoarea conului, [7, pag. cxvi].

# Anexa B
# Cazul directoarelor oblice

## B.1 Ecuaţia generală a elipsei

Fiind date numărul $e \in (0,1)$, punctul $F$, de coordonate $\{x_F, y_F\}$, şi dreapta $L$, de ecuaţie carteziană

$$Ax + By + C = 0, \qquad A, B, C \in \mathbb{R},$$

unde $A \cdot B \neq 0$, ne interesează ecuaţia algebrică a elipsei de *excentricitate* $e$ căreia dreapta $L$ îi este *directoarea* corespunzând *focarului* $F$.

Egalitatea

$$d(M,F) = e \cdot d(M,L), \qquad M \in E_2,$$

ridicată la pătrat, ia forma — via (1.5) —

$$(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 = e^2 \cdot \left( \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 .$$

Aici, $\{x, y\}$ desemnează cordonatele unui punct oarecare $M$ al elipsei în reperul $\mathscr{R}$.

Reorganizăm relaţia în jurul necunoscutelor $x$, $y$,

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + 2\delta x + 2\varepsilon y + \zeta = 0, \tag{B.1}$$

unde

$$\begin{cases} (1 - e^2) \cdot A^2 + B^2 = \alpha, \\ A^2 + (1 - e^2) \cdot B^2 = \beta, \\ -ABe^2 = \gamma \end{cases} \tag{B.2}$$

şi

$$\begin{cases} (A^2+B^2)\cdot x_F + Ae^2\cdot C = -\delta, \\ (A^2+B^2)\cdot y_F + Be^2\cdot C = -\varepsilon, \\ (A^2+B^2)\cdot (x_F^2+y_F^2) - e^2\cdot C^2 = \zeta. \end{cases} \tag{B.3}$$

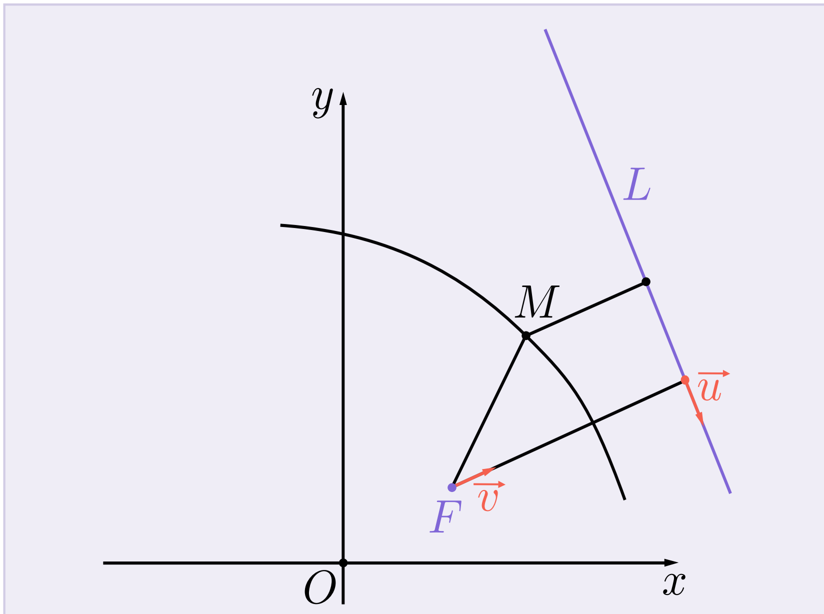


**Fig. B.1** $d(M,F) = e\cdot d(M,L)$ şi directoarea $L$, de ecuaţie carteziană $Ax+By+C=0$, este *oblică*: $A\cdot B \neq 0$.

**Lema B.1.** ([4, pag. 218]) *Are loc inegalitatea*

$$\alpha\beta > \gamma^2. \tag{B.4}$$

*Demonstraţie.* Observăm că

$$\begin{aligned} \alpha\beta - \gamma^2 &= \left[(1-e^2)A^2+B^2\right]\cdot\left[A^2+(1-e^2)B^2\right] - A^2B^2e^4 \\ &= (1-e^2)(A^2+B^2)^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă concluzia. □

Egalitatea (B.1) reprezintă, atunci când *discriminantul mic*[1] $\alpha\beta-\gamma^2$ este pozitiv iar mulţimea soluţiilor este *reală*[2] şi netrivială, *ecuaţia generală* a unei elipse [5, pag. 247].

[1] Vezi [5, pag. 232].

[2] Conform, de exemplu, [9, pag. 114].

## B.2 Reconstituirea elipsei

Rezolvăm, în cele ce urmează, sistemele algebrice (B.2), (B.3) în cazul particular al restricţiilor

$$\alpha, \beta > 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \zeta < 0$$

şi (B.4).

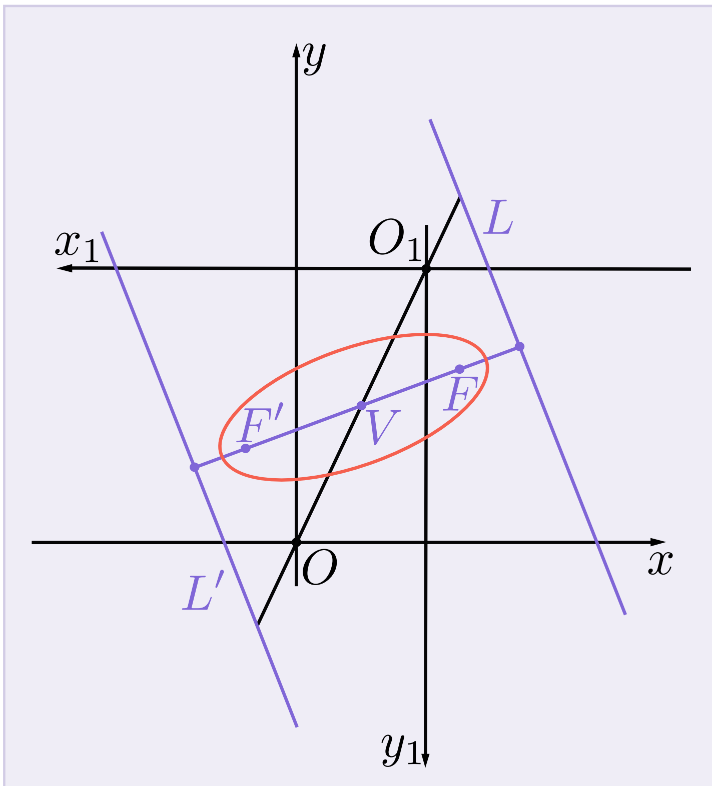


**Fig. B.2** Elipsa de centru $V$ *se vede identic* în raport cu reperele $Oxy$ şi $O_1x_1y_1$, de sens direct, care sunt simetrice faţă de $V$. Focarelor $F$, $F'$, din primul reper, le corespund focarele $F'$, respectiv $F$ din cel de-al doilea reper. În cazul particular dat de $V = O = O_1$ şi $F, F' \in Ox$, ecuaţiile algebrice $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ şi $\frac{(-x)^2}{(-a)^2} + \frac{(-y)^2}{(-b)^2} = 1$ produc *aceeaşi* elipsă.

Introducem necunoscutele intermediare $X, Y, Z$, cu formulele

$$X = A^2, \quad Y = B^2, \quad Z = 1 - e^2.$$

Sistemul (B.2) ne conduce la

$$\begin{cases} Z \cdot X + Y = \alpha, \\ X + Z \cdot Y = \beta, \\ XY \cdot (1-Z)^2 = \gamma^2, \end{cases} \tag{B.5}$$

cu restricţiile

$$X, Y > 0, \quad Z \in (0,1).$$

### B.2.1 Soluţia sistemului (B.5)

Primele două ecuaţii ale sistemului se rescriu în formalism matriceal,

$$\begin{pmatrix} Z & 1 \\ 1 & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Cum

$$\begin{pmatrix} Z & 1 \\ 1 & Z \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{Z^2-1} \begin{pmatrix} Z & -1 \\ -1 & Z \end{pmatrix},$$

obţinem expresiile

$$X = \frac{-\alpha \cdot Z + \beta}{1 - Z^2}, \quad Y = \frac{\alpha - \beta \cdot Z}{1 - Z^2} \tag{B.6}$$

Introducând mărimile din (B.6) în cea de-a treia ecuaţie (B.5), ajungem la

$$\frac{(-\alpha Z + \beta)(\alpha - \beta Z)}{(1+Z)^2} = \gamma^2,$$

respectiv la

$$Z^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2}{\alpha\beta - \gamma^2} \cdot Z + 1 = 0. \tag{B.7}$$

**Lema B.2.** *Are loc egalitatea*

$$(\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2)^2 - 4(\alpha\beta - \gamma^2)^2 = (\alpha+\beta)^2 \cdot [(\alpha-\beta)^2 + 4\gamma^2]. \tag{B.8}$$

*Demonstraţie.* Deducem că

$$\begin{aligned} &(\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2)^2 - 4(\alpha\beta - \gamma^2)^2 \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^2 + 4\gamma^4 + 4\gamma^2(\alpha^2+\beta^2) - 4(\alpha^2\beta^2 + \gamma^4 - 2\alpha\beta\gamma^2) \\ &= (\alpha^2-\beta^2)^2 + 4\gamma^2(\alpha+\beta)^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă concluzia. □

Discriminantul ecuaţiei (B.7) este

$$\begin{aligned}\Delta_Z &= \left(\frac{\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2}{\alpha\beta-\gamma^2}\right)^2 - 4\\ \text{(vezi (B.8))} \quad &= \frac{(\alpha+\beta)^2[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2]}{(\alpha\beta-\gamma^2)^2}.\end{aligned}$$

Produsul rădăcinilor ecuaţiei (B.7) fiind 1, soluţia căutată este *cea mai mică* dintre rădăcini, şi anume

$$\begin{aligned}Z = Z_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2}{\alpha\beta-\gamma^2} - \sqrt{\Delta_Z}\right)\\ &= \frac{1}{2(\alpha\beta-\gamma^2)}\left[\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2-(\alpha\beta-\gamma^2)\frac{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha\beta-\gamma^2}\right]\\ &= \frac{1}{2(\alpha\beta-\gamma^2)}\left[\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2-(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]. \qquad \text{(B.9)}\end{aligned}$$

**Lema B.3.** *Este valabilă estimarea*

$$Z \in (0,1).$$

*Demonstraţie.* Calculăm mărimea

$$\begin{aligned}1-Z &= e^2\\ &= \frac{1}{2(\alpha\beta-\gamma^2)}\left\{-\left[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2\right]+(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right\}\\ &= \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{2(\alpha\beta-\gamma^2)}\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]. \qquad \text{(B.10)}\end{aligned}$$

Estimarea $1-Z>0$ este echivalentă cu

$$\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}>0,$$

ceea ce se deduce din (B.4) prin ridicare la pătrat.

Estimarea $Z>0$ implică valabilitatea inegalităţilor

$$\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2 > (\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2},$$

respectiv, prin ridicare la pătrat,

$$(\alpha^2+\beta^2)^2+4\gamma^4+4\gamma^2(\alpha^2+\beta^2) > (\alpha^2-\beta^2)^2+4\gamma^2(\alpha+\beta)^2$$

şi

$$4(\alpha\beta-\gamma^2)^2>0,$$

de unde rezultă concluzia. $\square$

Pe baza (B.10), stabilim că

$$\begin{aligned}
e^2 &= \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{2(\alpha\beta-\gamma^2)}\cdot\frac{(\alpha+\beta)^2-\left[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2\right]}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\\
&= \frac{2\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}. \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}$$

Din ecuaţia (B.7) rezultă că

$$\begin{aligned}
1-Z^2 &= 2-\frac{\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2}{\alpha\beta-\gamma^2}\cdot Z\\
&= \frac{1}{2(\alpha\beta-\gamma^2)^2}\left\{4(\alpha\beta-\gamma^2)^2-(\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2)\left[\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2\right.\right.\\
&\quad \left.\left.-\ (\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]\right\}\\
\text{(vezi (B.8))}\ &= \frac{1}{2(\alpha\beta-\gamma^2)^2}\left\{-(\alpha+\beta)^2\left[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2\right]+(\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2)\right.\\
&\quad \left.\times\ (\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right\}\\
&= \frac{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{2(\alpha\beta-\gamma^2)^2}\left[-(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right.\\
&\quad \left.+\ \alpha^2+\beta^2+2\gamma^2\right].
\end{aligned}$$

**Lema B.4.** *Are loc egalitatea*

$$\begin{aligned}
&\left[\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2-(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]\cdot\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]\\
&=2(\alpha\beta-\gamma^2)\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]. \qquad \text{(B.12)}
\end{aligned}$$

*Demonstraţie.* Membrul stâng se rescrie ca

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)\left\{\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2-\left[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2\right]\right\}\\
&+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\left[-(\alpha+\beta)^2+\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2\right]\\
&=(\alpha+\beta)\cdot 2(\alpha\beta-\gamma^2)+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\cdot 2(\gamma^2-\alpha\beta),
\end{aligned}$$

de unde rezultă concluzia. $\square$

Conform (B.12),

$$\begin{aligned} 1-Z^2 &= \frac{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{2(\alpha\beta-\gamma^2)^2}\cdot\frac{2(\alpha\beta-\gamma^2)\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha\beta-\gamma^2}\cdot\frac{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}. \end{aligned} \tag{B.13}$$

**Lema B.5.** *Este valabilă estimarea*

$$\min\left\{\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}\right\} > Z.$$

*Demonstraţie.* Via (B.9), (B.12),

$$Z = 1-e^2 = \frac{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}. \tag{B.14}$$

Expresia $Z = Z(\alpha,\beta)$ fiind simetrică în variabilele $\alpha$, $\beta$, este suficient să probăm una dintre inegalităţi,

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}.$$

Observăm că aceasta este echivalentă cu

$$(\beta+\alpha)\left[\beta-\alpha+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right] > 0,$$

de unde rezultă concluzia. □

Revenind la expresiile (B.6), lema B.5 dovedeşte *pozitivitatea* mărimilor $X$, $Y$. Apoi, deducem că

$$\begin{aligned} X &= \frac{(\alpha\beta-\gamma^2)\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]} \\ &\quad\times\left[\beta-\alpha\cdot\frac{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\right] \\ &= \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2+(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}} \\ &= \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\cdot\frac{\beta-\alpha+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}} \end{aligned} \tag{B.15}$$

şi

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{(\alpha\beta-\gamma^2)\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]} \\
&\quad\times\left[\alpha-\beta\cdot\frac{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\right] \\
&= \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2+(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}} \\
&= \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\cdot\frac{\alpha-\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}.
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

Mai departe,

$$
\begin{aligned}
A^2+B^2 &= X+Y \\
&= \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\cdot\frac{2\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}} \\
&= \frac{2(\alpha\beta-\gamma^2)}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}} \\
&= 2(\alpha\beta-\gamma^2)\cdot\frac{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{(\alpha+\beta)^2-[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2]} \\
&= \frac{1}{2}\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right].
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

## B.2.2 *Soluţiile sistemului (B.3)*

Alegem numerele $A$, $B$ astfel încât

$$A^2 = X, \quad B^2 = Y, \quad \operatorname{sign}(A\cdot B) = -\operatorname{sign}(\gamma). \tag{B.18}$$

Aici, $X, Y$ sunt date de (B.15), (B.16).

Din primele două ecuaţii, extragem coordonatele *focarului*,

$$x_F = \frac{-\delta - Ae^2\cdot C}{A^2+B^2}, \quad y_F = \frac{-\varepsilon - Be^2\cdot C}{A^2+B^2}. \tag{B.19}$$

Cea de-a treia ecuaţie ne conduce la

$$(e^4-e^2)(A^2+B^2)\cdot C^2 + 2e^2(\delta A+\varepsilon B)\cdot C + \delta^2+\varepsilon^2-(A^2+B^2)\zeta = 0,$$

respectiv la

$$C^2 - \frac{2(\delta A + \varepsilon B)}{(1-e^2)(A^2+B^2)} \cdot C + \frac{(A^2+B^2)\zeta - (\delta^2+\varepsilon^2)}{e^2(1-e^2)(A^2+B^2)} = 0. \tag{B.20}$$

**Lema B.6.** *Au loc egalităţile*

$$(1-e^2)(A^2+B^2) = \frac{1}{2}\left[\alpha + \beta - \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4\gamma^2}\right] \tag{B.21}$$

*şi*

$$(1-e^2)(A^2+B^2)^2 = \alpha\beta - \gamma^2, \tag{B.22}$$

*respectiv*

$$\begin{aligned} & e^2(1-e^2)^2(A^2+B^2)^2 \\ &= \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{8(\alpha\beta-\gamma^2)} \cdot \left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]^3. \end{aligned} \tag{B.23}$$

*Demonstraţie.* Egalitatea (B.21) rezultă din (B.14), (B.17).

Egalitatea (B.22) se bazează pe identitatea

$$(1-e^2)(A^2+B^2)^2 = (1-e^2)(A^2+B^2) \cdot (A^2+B^2)$$

şi pe (B.21), (B.17).

La egalitatea (B.23), conform (B.11), avem

$$\begin{aligned} & e^2\left[(1-e^2)(A^2+B^2)\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2} \cdot \frac{\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]^2}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2} \cdot \frac{\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]^3}{4(\alpha\beta-\gamma^2)}, \end{aligned}$$

de unde rezultă concluzia. □

Discriminantul ecuaţiei (B.20) este

$$\begin{aligned} \Delta_C &= 4\left[\frac{\delta A + \varepsilon B}{(1-e^2)(A^2+B^2)}\right]^2 - 4\frac{(A^2+B^2)\zeta - (\delta^2+\varepsilon^2)}{e^2(1-e^2)(A^2+B^2)} \\ &= 4\frac{e^2(\delta A+\varepsilon B)^2 - (1-e^2)(A^2+B^2)^2\zeta + (1-e^2)(A^2+B^2)(\delta^2+\varepsilon^2)}{e^2(1-e^2)^2(A^2+B^2)^2}. \end{aligned} \tag{B.24}$$

Evident, din (B.24) rezultă că *restricţia* $\zeta < 0$ *implică* $\Delta_C > 0$.

Via (B.2), remarcăm că numărătorul fracţiei anterioare poate fi reorganizat ca

$$\delta^2\left[e^2A^2 + (1-e^2)(A^2+B^2)\right] + \varepsilon^2\left[e^2B^2 + (1-e^2)(A^2+B^2)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+2\delta\varepsilon\cdot ABe^2-(1-e^2)(A^2+B^2)^2\cdot\zeta\\
&=\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(1-e^2)(A^2+B^2)^2\cdot\zeta
\end{aligned}
$$

Pe baza (B.22), (B.23), stabilim că

$$
\begin{aligned}
\Delta_C &= 4\frac{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta}{e^2(1-e^2)^2(A^2+B^2)^2}\\
&= 32\frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\cdot\frac{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta}{\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]^3},
\end{aligned}
\tag{B.25}
$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2}\cdot\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]=2\sqrt{\frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}\\
&\times\sqrt{\frac{2\left[\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta\right]}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}.
\end{aligned}
\tag{B.26}
$$

Rădăcinile ecuaţiei (B.20) sunt

$$
\begin{aligned}
C_{1,2} &= \frac{2(\delta A+\varepsilon B)\pm(1-e^2)(A^2+B^2)\sqrt{\Delta_C}}{2(1-e^2)(A^2+B^2)} \qquad \text{(B.27)}\\
&= \frac{\delta A+\varepsilon B\pm\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2}\cdot\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}.
\end{aligned}
$$

Produsul lor fiind negativ — $\zeta<0$ —, cele două directoare $L$, $L'$, de ecuaţii

$$
Ax+By+C_{1,2}=0,
$$

vor fi situate *de o parte şi de alta* a originii $O$ a reperului $\mathscr{R}$.
Conform (2.7), *distanţa dintre directoare* verifică egalitatea

$$
\frac{2a}{e}=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}},
$$

de unde — via (B.11) —

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{e}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\frac{|C_2-C_1|}{2}\\
&= \sqrt{\frac{\frac{2\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}{\frac{1}{2}\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}}\cdot\frac{|C_2-C_1|}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\frac{2\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}{\frac{1}{2}\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}} \cdot \frac{1}{2} \\
&\times \frac{4\sqrt{\frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}} \cdot \sqrt{\frac{2\left[\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta\right]}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}} \\
&= \frac{4\sqrt{\alpha\beta-\gamma^2} \cdot \sqrt{\frac{2\left[\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta\right]}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}}{(\alpha+\beta)^2-[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2]} \\
&= \sqrt{\frac{2\left[\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta\right]}{(\alpha\beta-\gamma^2)\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}}.
\end{aligned}
$$

De asemeni, pe baza (B.14),

$$
\begin{aligned}
b = a\sqrt{1-e^2} = a\sqrt{Z} = a \cdot \sqrt{\frac{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}} \\
= \sqrt{\frac{2\left[\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta\right]}{(\alpha\beta-\gamma^2)\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}}.
\end{aligned}
$$

Notăm cu $V$ *centrul* elipsei. Atunci, conform (B.19),

$$
\begin{aligned}
x_V &= \frac{x_F+x_{F'}}{2} = -\frac{\delta}{A^2+B^2} - \frac{Ae^2}{A^2+B^2} \cdot \frac{C_1+C_2}{2} \qquad \text{(B.28)} \\
&= -\frac{\delta}{A^2+B^2} - \frac{Ae^2(\delta A+\varepsilon B)}{(1-e^2)(A^2+B^2)^2} \\
&= -\frac{\delta(1-e^2)(A^2+B^2)+A^2e^2\cdot\delta+ABe^2\cdot\varepsilon}{(1-e^2)(A^2+B^2)^2} \\
&= -\frac{\frac{\delta}{2}\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]+A^2e^2\cdot\delta-\gamma\varepsilon}{\alpha\beta-\gamma^2} \\
&= -\frac{\frac{\delta}{2}\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]+(A^2+B^2-\alpha)\delta-\gamma\varepsilon}{\alpha\beta-\gamma^2} \\
&= -\frac{1}{\alpha\beta-\gamma^2}\left\{\frac{\delta}{2}\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]\right. \\
&+ \left.\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]-\alpha\right\}\delta-\gamma\varepsilon\right\} \\
&= \frac{\gamma\varepsilon-\delta\beta}{\alpha\beta-\gamma^2}.
\end{aligned}
$$

Vezi [4, pag. 222].
Analog,

$$\begin{aligned} y_V &= \frac{y_F + y_{F'}}{2} = -\frac{\varepsilon}{A^2+B^2} - \frac{Be^2}{A^2+B^2} \cdot \frac{C_1+C_2}{2} \\ &= -\frac{\varepsilon}{A^2+B^2} - \frac{Be^2(\delta A + \varepsilon B)}{(1-e^2)(A^2+B^2)^2} \\ &= -\frac{\varepsilon(1-e^2)(A^2+B^2) + B^2e^2 \cdot \varepsilon + ABe^2 \cdot \delta}{(1-e^2)(A^2+B^2)^2} \\ &= -\frac{\frac{\varepsilon}{2}\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right] + B^2e^2\cdot\varepsilon - \gamma\delta}{\alpha\beta-\gamma^2} \\ &= -\frac{\frac{\varepsilon}{2}\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right] + (A^2+B^2-\beta)\varepsilon - \gamma\delta}{\alpha\beta-\gamma^2} \\ &= -\frac{1}{\alpha\beta-\gamma^2}\left\{\frac{\varepsilon}{2}\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]\right. \\ &+ \left.\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]-\beta\right\}\varepsilon - \gamma\delta\right\} \\ &= \frac{\gamma\delta-\varepsilon\alpha}{\alpha\beta-\gamma^2}. \end{aligned} \tag{B.29}$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{-\delta - Ae^2C_1}{A^2+B^2} \\ &= -\frac{\delta}{A^2+B^2} - \frac{Ae^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{2(\delta A+\varepsilon B)}{(1-e^2)(A^2+B^2)} - \sqrt{\Delta_C}\right] \\ &= -\frac{\delta(1-e^2)(A^2+B^2) + A^2e^2\delta + ABe^2\varepsilon}{(1-e^2)(A^2+B^2)^2} + \frac{Ae^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} \\ &= x_V + \frac{Ae^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} \end{aligned} \tag{B.30}$$

şi

$$\begin{aligned} x_{F'} &= \frac{-\delta - Ae^2C_2}{A^2+B^2} \\ &= -\frac{\delta}{A^2+B^2} - \frac{Ae^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{2(\delta A+\varepsilon B)}{(1-e^2)(A^2+B^2)} + \sqrt{\Delta_C}\right] \\ &= -\frac{\delta(1-e^2)(A^2+B^2) + A^2e^2\delta + ABe^2\varepsilon}{(1-e^2)(A^2+B^2)^2} - \frac{Ae^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} \\ &= x_V - \frac{Ae^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2}, \end{aligned} \tag{B.31}$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
y_F &= \frac{-\varepsilon - Be^2C_1}{A^2+B^2} \\
&= -\frac{\varepsilon}{A^2+B^2} - \frac{Be^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{2(\delta A+\varepsilon B)}{(1-e^2)(A^2+B^2)} - \sqrt{\Delta_C}\right] \\
&= -\frac{\varepsilon(1-e^2)(A^2+B^2)+B^2e^2\varepsilon+ABe^2\delta}{(1-e^2)(A^2+B^2)^2} + \frac{Be^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} \\
&= y_V + \frac{Be^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2}
\end{aligned}
\tag{B.32}
$$

şi

$$
\begin{aligned}
y_{F'} &= \frac{-\varepsilon - Be^2C_2}{A^2+B^2} \\
&= -\frac{\varepsilon}{A^2+B^2} - \frac{Be^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{2(\delta A+\varepsilon B)}{(1-e^2)(A^2+B^2)} + \sqrt{\Delta_C}\right] \\
&= -\frac{\varepsilon(1-e^2)(A^2+B^2)+B^2e^2\varepsilon+ABe^2\delta}{(1-e^2)(A^2+B^2)^2} - \frac{Be^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} \\
&= y_V - \frac{Be^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2}.
\end{aligned}
\tag{B.33}
$$

**Lema B.7.** *Este valabilă egalitatea*

$$
\begin{aligned}
\frac{e^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} &= \frac{1}{\alpha\beta-\gamma^2}\sqrt{\frac{2\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}} \\
&\quad\times\sqrt{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta}.
\end{aligned}
\tag{B.34}
$$

*Demonstraţie.* Avem relaţiile

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}{\frac{1}{2}\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}\cdot\frac{1}{2} \\
&\times 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\cdot\frac{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta}{\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]^3}} \\
&= \frac{8\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\cdot\sqrt{\alpha\beta-\gamma^2}}{\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]\cdot\{(\alpha+\beta)^2-[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2]\}} \\
&\times\sqrt{\frac{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]\sqrt{\alpha\beta-\gamma^2}}\cdot\sqrt{\frac{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}} \\
&= 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\cdot[\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta]}{\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]^2\left[\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right](\alpha\beta-\gamma^2)}} \\
&= 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\cdot[\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta]}{\left[\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]\cdot 4(\alpha\beta-\gamma^2)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta-\gamma^2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\,[\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta]}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}},
\end{aligned}
$$

de unde rezultă concluzia. □

**Lema B.8.** *Au loc estimările*

$$
\begin{aligned}
\frac{|A|e^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} &= \frac{1}{\alpha\beta-\gamma^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left[\beta-\alpha+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]} \\
&\quad\times\sqrt{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta}
\end{aligned}
$$

*şi*

$$
\begin{aligned}
\frac{|B|e^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} &= \frac{1}{\alpha\beta-\gamma^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left[\alpha-\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]} \\
&\quad\times\sqrt{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta}.
\end{aligned}
$$

*Demonstraţie.* Utilizăm formulele (B.15), (B.16). Astfel,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{X}e^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2} \\
&= \sqrt{\frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\cdot\frac{\beta-\alpha+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}} \\
&\times\frac{1}{\alpha\beta-\gamma^2}\sqrt{\frac{2\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}} \\
&\times\sqrt{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta} \\
&= \sqrt{\frac{2\left[\beta-\alpha+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}{(\alpha\beta-\gamma^2)\left\{(\alpha+\beta)^2-[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2]\right\}}} \\
&\times\sqrt{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta},
\end{aligned}
$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{Y}e^2}{A^2+B^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_C}}{2}\\
&=\sqrt{\frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}\cdot\frac{\alpha-\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}\\
&\times\frac{1}{\alpha\beta-\gamma^2}\sqrt{\frac{2\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}\\
&\times\sqrt{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta}\\
&=\sqrt{\frac{2\left[\alpha-\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}{(\alpha\beta-\gamma^2)\{(\alpha+\beta)^2-[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2]\}}}\\
&\times\sqrt{\delta^2\beta+\varepsilon^2\alpha-2\delta\varepsilon\gamma-(\alpha\beta-\gamma^2)\zeta},
\end{aligned}
$$

de unde rezultă concluzia. □

Conform (1.7), *axa mare* a elipsei are ecuaţia carteziană

$$y-y_V=m\cdot(x-x_V),\quad m=\frac{B}{A}.$$

Deducem că

$$
\begin{aligned}
m&=\operatorname{sign}(A\cdot B)\cdot\left|\frac{B}{A}\right|=-\operatorname{sign}(\gamma)\cdot\sqrt{\frac{Y}{X}}\\
&=-\operatorname{sign}(\gamma)\cdot\sqrt{\frac{\alpha-\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{\beta-\alpha+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}}.
\end{aligned}
$$

**Lema B.9.** ([5, pag. 242]) *Fie $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, cu $m=\tan\varphi$. Atunci,*

$$\cot(2\varphi)=\frac{\alpha-\beta}{2\gamma}.$$

*Demonstraţie.* Au loc relaţiile

$$
\begin{aligned}
\cot(2\varphi)&=\frac{1-m^2}{2m}\\
&=\frac{-\operatorname{sign}(\gamma)\cdot 2(\beta-\alpha)}{2\sqrt{\left[\alpha-\beta+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]\cdot\left[\beta-\alpha+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]}}\\
&=\frac{-\operatorname{sign}(\gamma)\cdot(\beta-\alpha)}{\sqrt{[(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2]-(\alpha-\beta)^2}}=-\operatorname{sign}(\gamma)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2|\gamma|},
\end{aligned}
$$

de unde rezultă concluzia. □

Via (B.18), remarcăm că sistemul algebric (B.2) admite *două* soluţii, date de perechile — vezi şi [5, pag. 313] —

$$\{A, B\}, \quad \{-A, -B\}.$$

Excentricitatea $e$ a elipsei, parte a soluţiei sistemului (B.5), este invariantă la schimbarea perechii $\{A, B\}$.

De asemeni, via (B.24), discriminantul $\Delta_C$ nu se modifică la schimbarea perechii $\{A, B\}$. Pe baza (B.27), observăm modificarea rădăcinilor ecuaţiei (B.20), şi anume

$$C_1(A,B) = -C_2(-A,-B), \quad C_2(A,B) = -C_1(-A,-B),$$

de unde

$$L(A,B) = L'(-A,-B), \quad L'(A,B) = L(-A,-B).$$

Apoi, conform (B.28), (B.29), avem

$$x_V(A,B) = x_V(-A,-B), \quad y_V(A,B) = y_V(-A,-B).$$

În sfârşit, din (B.30), (B.31), (B.32), (B.33), deducem că

$$F(A,B) = F'(-A,-B), \quad F'(A,B) = F(-A,-B).$$

La *reconstituirea* elipsei, nu vom putea recupera opţiunea *iniţială* privind perechea focar-directoare. Evident, această opţiune nu afectează *desenul* elipsei.

**Lema B.10.** (Discriminantul mare, [5, pag. 233]) *Discriminantul $\Delta_C$ admite reprezentarea*

$$\Delta_C = -\frac{4\lambda_2}{\lambda_1^2(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \gamma & \beta & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{vmatrix},$$

*unde* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *sunt valorile proprii ale matricei*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}.$$

*Demonstraţie.* Utilizăm expresia (B.25). □

# Anexa C
# Evoluta elipsei

Calculăm coordonatele carteziene ale picioarelor normalelor la elipsă duse dintr-un punct oarecare de pe evoluta acesteia. Conform [6], dacă *acest punct îi este interior elipsei*, normalele o vor intersecta în *trei puncte*. Astfel, ecuaţia (5.40) va avea trei soluţii distincte (reale).

## C.1 Raza de curbură a elipsei. Astroida centrelor de curbură

Folosim Figura C.1. Normala exterioară[1] şi tangenta, ambele trecând prin punctul dat $P$, de coordonate $\{x_P, y_P\}$, la elipsa de matrice $\alpha$ au vectorii directori

$$\overline{u} = \alpha\overline{CP} = m \cdot \overline{C} + n \cdot \overline{D}, \quad \overline{v} = \overline{k} \times \overline{u},$$

unde $\overline{CP} = m \cdot \overline{\mathbf{c}} + n \cdot \overline{d}$.

Via (3.8), (3.9), introducem mărimile

$$M = md^2 - n\left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right), \quad N = n\mathbf{c}^2 - m\left(\overline{\mathbf{c}} \cdot \overline{d}\right).$$

Atunci, versorii tangentei şi ai normalei principale [10, pag. 28] au expresiile

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{v}}{v}, \quad v = u,$$

respectiv

$$\overline{\nu} = -\frac{\overline{u}}{u}, \quad u^2 = \frac{mM + nN}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2}.$$

[1] Matricea $\alpha$ este (strict) pozitiv definită.

Fie $\overline{V} = \dot{\overline{CP}} = \dot{m}\,\overline{\mathbf{c}} + \dot{n}\,\overline{d} = \dot{\overline{OP}}$, $V = \left|\overline{V}\right|$. Raza de curbură [10, pag. 29] a elipsei în punctul $P$ se calculează din prima relaţie Frenet-Serret:

$$\frac{1}{R} \cdot \overline{\nu} = \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{1}{V} \cdot \frac{d\overline{\tau}}{dt},$$

unde [10, pag. 126]

$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{(\overline{v} \times \dot{\overline{v}}) \times \overline{v}}{v^3} = -\frac{m\,\dot{n} - \dot{m}\,n}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|} \cdot \frac{\overline{u}}{u^3}.$$

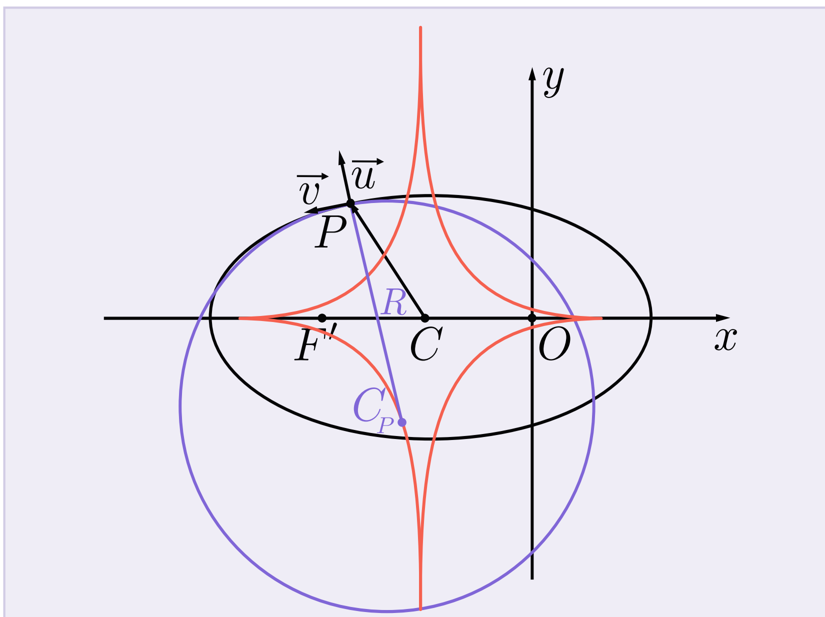


**Fig. C.1** Normala la elipsă, în punctul $P$, îi este tangentă [12, pag. 16] astroidei în centrul $C_P$ al cercului de curbură al elipsei. Raza acestuia este $R$.

Cum

$$\overline{u} \times \dot{\overline{u}} = \frac{m\,\dot{n} - \dot{m}\,n}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|} \cdot \overline{k},$$

deducem că

$$R = \frac{u^2 V}{\left|\overline{u} \times \dot{\overline{u}}\right|} = \frac{(mM + nN)^{\frac{3}{2}}}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|}.$$

Centrul de curbură $C_P$, de coordonate $\{x_{C_P}, y_{C_P}\}$, se determină din relaţiile

$$\overline{CC_P} = \overline{CP} + R \cdot \overline{\mathrm{v}} = \left( m - \frac{mM + nN}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot M \right) \overline{\mathbf{c}} + \left( n - \frac{mM + nN}{\left|\overline{\mathbf{c}} \times \overline{d}\right|^2} \cdot N \right) \overline{d}.$$

Pentru $\overline{\mathbf{c}} = \overline{a}, \overline{d} = \overline{b}$, obţinem

$$\overline{CC_P} = (x_{C_P} + c)\,\overline{i} + y_{C_P}\overline{j} = \frac{m^3 c^2}{a} \cdot \overline{i} - \frac{n^3 c^2}{b} \cdot \overline{j},$$

de unde rezultă *relaţia biunivocă* dintre punctele $P$ şi $C_P$,

$$x_{C_P} + c = \frac{(x_P + c)^3}{a^4} \cdot c^2, \quad y_{C_P} = -\frac{y_P^3}{b^4} \cdot c^2.$$

Astfel, locul geometric al centrelor de curbură $C_P$ are ecuaţia carteziană

$$[a(x_{C_P} + c)]^{\frac{2}{3}} + (by_{C_P})^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

## C.2 Normale la elipsă printr-un punct de pe astroidă

Folosim Figura C.2. În punctul $Q$, de coordonate $\{x_Q, y_Q\}$, unde

$$x_Q + c = \frac{(x_P + c)^3}{a^2}, \quad y_Q = \frac{y_P^3}{b^2},$$

se intersectează asimptotele, verticală şi orizontală, ale hiperbolei echilatere de ecuaţie carteziană

$$xy = y_Q(x + c) + x_Q y.$$

Ea trece prin punctele $C, C_P, P$, fiind *unica* hiperbolă echilateră cu această proprietate care are asimptotele paralele cu axele de coordonate.

Fie $\{x, y\}$ coordonatele carteziene ale unui *prezumtiv* punct de intersecţie dintre elipsă şi hiperbola echilateră. Atunci, numărul $x$ va verifica ecuaţia algebrică

$$\begin{aligned}
&a^2(x+c)^4 - 2(x_P+c)^3(x+c)^3 + 3(x_P+c)^2 \\
&\times \left[(x_P+c)^2 - a^2\right](x+c)^2 + 2a^2(x_P+c)^3(x+c) \\
&-(x_P+c)^6 = 0.
\end{aligned}$$

Membrul stâng al ecuaţiei poate fi factorizat, de unde rezultă că

$$\begin{aligned}
&(x - x_P)^2 \cdot \left\{a^2(x+c)^2 + 2(x_P+c)\left[a^2 - (x_P+c)^2\right]\right. \\
&\left.\times (x+c) - (x_P+c)^4\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Rezolvând ecuaţia, obţinem coordonatele carteziene ale celor trei puncte de intersecţie căutate,

$$x_{1,2} = x_P, \quad y_{1,2} = y_P,$$

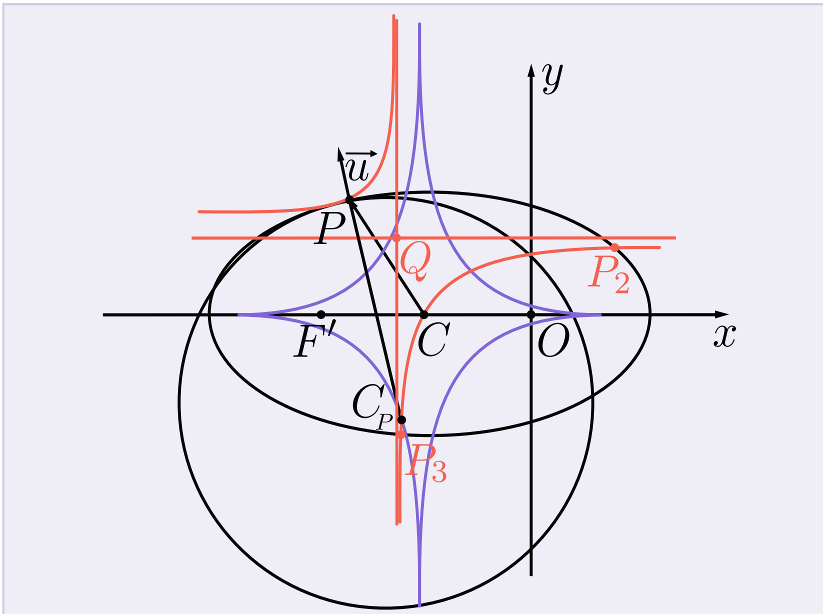


**Fig. C.2** Prin punctul $C_P$, interior elipsei, situat pe astroida centrelor de curbură ale acesteia, pot fi duse trei normale la elipsă, cu picioarele $P$, $P_2$, $P_3$.

respectiv

$$x_{3,4} + c = -(x_P + c)\left\{\frac{y_P^2}{b^2} \mp \sqrt{1 - \left[\frac{(x_P + c)y_P}{ab}\right]^2}\right\} \tag{C.1}$$

şi

$$y_{3,4} = -y_P\left\{\frac{(x_P + c)^2}{a^2} \pm \sqrt{1 - \left[\frac{(x_P + c)y_P}{ab}\right]^2}\right\}.$$

# Anexa D
# Normale la elipsă duse dintr-un punct interior al evolutei acesteia

Ecuaţia (2.17) caracterizează *abscisele* punctelor de intersecţie ale elipsei cu hiperbola $\mathscr{H}_{pq}$. Fiind de gradul al IV-lea, formulele soluţiilor sale sunt impracticabile. Dacă cunoaştem o soluţie *dublă* a ei, $z_P = x_P + c$, atunci celelalte două soluţii au formule simple, date de expresiile (C.1). În cele ce urmează, presupunând cunoscute abscisele $x_{P_1} \neq x_{P_2}$, calculăm ecuaţia algebrică de gradul al II-lea verificată de restul soluţiilor ecuaţiei (2.17).

## D.1 Ecuaţia carteziană a hiperbolei $\mathscr{H}_{pq}$

Folosim Figura D.1. În contextul formulelor (5.17), (5.38) şi (5.32), unde

$$\overline{r} = \overline{CM}, \quad \overline{r}_0 = \overline{CP_1}, \quad \overline{r}_1 = \overline{CP_2}$$

şi

$$\overline{CP_q} = m_q \cdot \overline{a} + n_q \cdot \overline{b}, \quad m_q^2 + n_q^2 = 1, \quad q \in \overline{1,2},$$

pentru $m_1 \neq m_2$, $n_1 \neq n_2$, respectiv $m_1 n_2 - m_2 n_1 \neq 0$, obţinem

$$\lambda = \frac{(m_2 - m_1) n_2 a^2 - (n_2 - n_1) m_2 b^2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}.$$

Deoarece — vezi şi (5.39) —

$$\begin{cases} x_M + c = m_1 \cdot \frac{\lambda + a^2}{a}, \\ y_M = n_1 \cdot \frac{\lambda + b^2}{b}, \end{cases}$$

avem

$$x_M + c = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{m_1 m_2 (n_2 - n_1)}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, \quad y_M = \frac{c^2}{b} \cdot \frac{n_1 n_2 (m_2 - m_1)}{m_1 n_2 - m_2 n_1}.$$

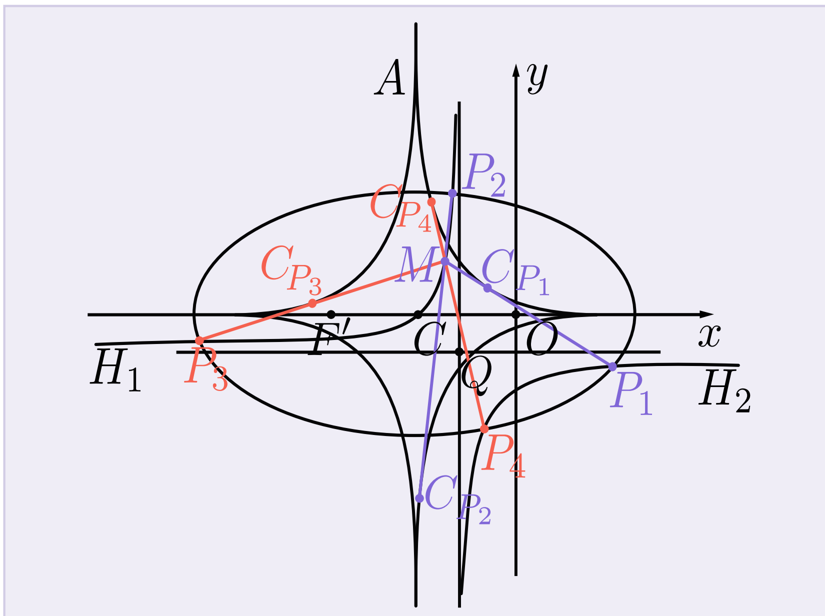


**Fig. D.1** Prin punctul $M$, interior atât elipsei cât şi evolutei acesteia (astroida $A$), pot fi duse patru normale la elipsă, cu picioarele $P_{1-4}$, conform [6]. Punctele $P_{1-4}$ sunt situate pe hiperbola echilateră $H_1 \cup H_2$, care trece prin $C$ şi $M$. Dreptele $MP_{1-4}$ îi sunt tangente astroidei în punctele $C_{P_{1-4}}$.

În contextul formulelor (2.14), (2.16), (2.15), deducem că

$$p = -\frac{a^2}{c^2} \cdot (x_M + c), \quad q = \frac{b^2}{c^2} \cdot y_M.$$

Ecuaţia hiperbolei echilatere $\mathscr{H}_{pq}$, de ramuri $H_{1,2}$, devine

$$(x+c)y = -\frac{b^2}{c^2} y_M \cdot (x+c) + \frac{a^2}{c^2}(x_M + c) \cdot y. \tag{D.1}$$

**Lema D.1.**

$$M \in H_1 \cup H_2.$$

*Demonstraţie.* Utilizăm prima din relaţiile (2.7). □

Ecuaţia (D.1) se rescrie ca

$$xy = -\frac{b^2}{c^2} y_M \cdot (x+c) + \left( \frac{a^2}{c^2} x_M + \frac{b^2}{c} \right) \cdot y.$$

## D.2 Factorizarea membrului stâng al ecuaţiei (2.17)

Pe baza teoremei împărţirii cu rest a polinoamelor de o variabilă, avem identitatea

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) + r(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

unde deîmpărţitul este

$$\begin{aligned} f(x) = {} & b^2(x+c)^4 + 2pb^2(x+c)^3 + (b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2)(x+c)^2 \\ & -2pa^2b^2(x+c) - a^2b^2p^2, \end{aligned}$$

împărţitorul

$$f_1(x) = (x - x_{P_1})(x - x_{P_2}) = (x+c)^2 - a(m_1+m_2)(x+c) + a^2 m_1 m_2,$$

câtul

$$f_2(x) = b^2(x+c)^2 + b^2\varphi_1 \cdot (x+c) + \varphi_3 + ab^2(m_1+m_2)\varphi_1$$

şi restul

$$r(x) = R_1 \cdot (x+c) + R_2.$$

Aici,

$$\begin{cases} \varphi_1 = 2p + a(m_1+m_2), \\ \varphi_2 = 2p + m_1 m_2 \varphi_1, \\ \varphi_3 = b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2(1+m_1m_2) \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} R_1 = -a^2b^2\varphi_2 + a(m_1+m_2)[\varphi_3 + ab^2(m_1+m_2)\varphi_1], \\ R_2 = -a^2b^2p^2 - a^2m_1m_2[\varphi_3 + ab^2(m_1+m_2)\varphi_1]. \end{cases}$$

**Lema D.2.**

$$R_1 = R_2 = 0.$$

*Demonstraţie.* Folosim identităţile următoare:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -a\frac{m_1n_2+m_2n_1}{m_1n_2-m_2n_1}(m_2-m_1), \\ \varphi_2 = -a\frac{m_1m_2}{m_1n_2-m_2n_1}[2(n_2-n_1)+(m_1n_2+m_2n_1)(m_2-m_1)], \\ \varphi_3 = -a^2b^2\frac{(m_2^2-m_1^2)^2+m_1m_2(n_2-n_1)^2}{(m_1n_2-m_2n_1)^2}. \end{cases} \tag{D.2}$$

Justificarea s-a încheiat. $\square$

Factorul $f_2$ are expresia — via (D.2) —

$$\begin{aligned} f_2(x) &= b^2\left[(x+c)^2 - a\frac{(m_1n_2+m_2n_1)(m_2-m_1)}{m_1n_2-m_2n_1}(x+c) - a^2\frac{m_1m_2(n_2-n_1)^2}{(m_1n_2-m_2n_1)^2}\right] \\ &= b^2\left\{(x+c)^2 - \frac{[(x_{P_1}+c)y_{P_2}+(x_{P_2}+c)y_{P_1}](x_{P_2}-x_{P_1})}{(x_{P_1}+c)y_{P_2}-(x_{P_2}+c)y_{P_1}}(x+c)\right. \\ &\quad \left. -a^2\frac{(x_{P_1}+c)(x_{P_2}+c)(y_{P_2}-y_{P_1})^2}{[(x_{P_1}+c)y_{P_2}-(x_{P_2}+c)y_{P_1}]^2}\right\}. \end{aligned}$$

# Referinţe Bibliografice


1. Akopyan, A.V., Zaslavsky, A.A.: Geometry of conics. American Mathematical Society, Providence (2007)
2. Boulanger, Ph., Hayes, M.: Bivectors and waves in mechanics and optics. Chapman & Hall, London (1993)
3. Dörrie, H.: 100 great problems in elementary mathematics, their history and solution. Dover Publications, Inc., New York (1965)
4. Eisenhart, L.P.: Coordinate geometry. Dover Publications, Inc., New York (1960)
5. Gheorghiev, Gh., Miron, R., Papuc, D.I.: Geometrie analitică şi diferenţială, Volumul I. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1968)
6. Hartmann, F., Jantzen, R.: Apollonius's ellipse and evolute revisited. Convergence, MAA (2010) *On-line* la adresa:
   `https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/apolloniuss-ellipse-and-evolute-revisited`
7. Heath, T.L.: Apollonius of Perga, Treatise on conic sections. Cambridge University Press, Cambridge (1896) *On-line* la adresa:
   `https://ia902606.us.archive.org/20/items/treatiseonconic00heatgoog/treatiseonconic00heatgoog.pdf`
8. Iacob, C.: Mecanică teoretică, Ediţia a II-a. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1980)
9. Kanatani, K.: Statistical optimization for geometric computation: theory and practice. North Holland, Amsterdam (1996)
10. Mustafa, O.G.: Elemente de mecanica punctului material şi a solidului rigid. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (2006) *On-line* la adresa:
   `https://www.octawian.ro/fisiere/tutoriale/mecanica.pdf`
11. Mustafa, O.G.: Forma canonică Jordan a matricelor. Teorie, aplicaţii. *On-line* la adresa:
   `https://www.octawian.ro/fisiere/tutoriale/jordan.pdf`
12. Mustafa, O.G.: Curbe şi suprafeţe. *On-line* la adresa:
   `https://www.octawian.ro/fisiere/tutoriale/curbe_suprafete.pdf`
13. Nicolescu, L., Boskoff, V.: Probleme practice de geometrie. Editura Tehnică, Bucureşti (1990)
14. Osgood, W.F., Graustein, W.C.: Plane and solid analytic geometry. The MacMillan Company, New York (1921) *On-line* la adresa:
   `https://ia802707.us.archive.org/27/items/planesolidanalyt00osgoiala/planesolidanalyt00osgoiala.pdf`
15. Szebehely, V.G.: Adventures in celestial mechanics. A first course in the theory of orbits. University of Texas Press, Austin (1991)
16. Top orthographic view,
   `https://docs.blender.org/manual/en/latest/editors/3dview/navigate/views.html`

17. Udrişte, C., Tomuleanu, V., Vernic, Gh.: Geometrie analitică, Manual pentru clasa a XI-a. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1989)

# Index