

Octavian G. Mustafa

Portrete în planul fazelor

Sisteme diferențiale liniare și omogene 2×2



Publicațiile DAL
Craiova

Fișier prelucrat în data de [March 31, 2026]

Avertisment

Acest eseu nu a fost raportat vreunui referent. În consecință, conținutul său trebuie considerat “ca atare.”

Autorul vă așteaptă comentariile la adresa lui de e-mail¹ și vă mulțumește anticipat pentru efortul depus.

Fiecare proiect de la *Publicațiile DAL* trebuie considerat “șantier” dacă nu este declarat altfel. Versiunea sa este cea a datei de pe pagina cu titlul.

Craiova, Mai 18, 2015

O.G.M.

¹ octawian@yahoo.com

Prefață

Prin *sistem dinamic* înțelegem, *la prima vedere*, un ansamblu de obiecte *rigide* din mediul înconjurător *macroscopic* a căror *mișcare mecanică* o analizăm *pe termen lung*, într-un *mod unitar*. O atare întreprindere presupune construcția unui *model matematic* al mișcării, descris printr-un sistem de *ecuații diferențiale ordinare*, în care sunt incluse (doar) acele caracteristici (ale mișcării) pe care dorim să le investigăm. Categoriec, modelul matematic poate exprima, prin modificarea parametrilor săi, și alte tipuri de *evoluție*, sprijinindu-se pe diverse genuri de ecuații (cu derivate parțiale, aleatoare, cu întârzieri, ș.a.m.d.). Astfel, ne putem ocupa de mișcarea electronilor, invizibilă *în mod direct*, ceea ce nu ne împiedică deloc să proiectăm varii consumatori de energie electrică, respectiv preocupă de interacțiunile sociale, de ciclurile economice, de circulația veștilor proaste și de multe altele. Toate acestea grație unui model matematic matur, cu parametri bine aleși. Cum mișcarea mecanică pare (cea) mai ușor de imaginat, *terminologia mecanicii* (*punctul curent* al curbei plane este o *particulă* ș.a.m.d.) a fost împrumutată de textele referitoare la sisteme dinamice.

Aproape oricare volum în care se discută despre sisteme dinamice *continue* (în cazul de față) conține o mulțime de desene sofisticate despre care aflăm, adesea, că provin din *simulări pe calculator*. Cititorul atent al volumului se va întreba invariabil, de îndată ce se va fi obișnuit cu demonstrațiile cărora desenele în cauză le ilustrează subtilitățile, *cum pot fi făcute* astfel de *reprezentări grafice* ale *tregerii timpului* și de unde *știm* că ele *sunt corecte* și nu produsul (prea) artistic al unei imaginații greu de oprit. Am răspuns, pe scurt, servindu-ne de *Python* și de *SVG*.

Paginile care urmează conțin demonstrații detaliate, bazate pe cunoștințe uzuale de *calcul diferențial și integral*, de *algebră liniară* și de *geometrie diferențială* a curbelor. Acestea le vor fi familiare tuturor studenților de la *științe exacte* ori de la *științe inginerești*. Cu câteva excepții, datorate ideii de pregătire pentru lecturile ulterioare despre sisteme dinamice a cititorului lor (vezi referirea la mulțimi anumite din planul fazelor cu titulatura de *varietăți*), terminologia a fost limitată la strictul necesar. În plus, anumite constructe matematice complicate (*exponențiala* unei matrice), a căror justificare teoretică nu este necesară pentru *lucrul practic* cu sistemele

dinamice modelate prin ecuații diferențiale liniare, au fost înlocuite cu obiecte ale calculului matriceal, aflate la îndemâna studenților din primii ani de licență.

Portretul orbitelor — sau *desenul alurii traiectoriilor de fază* ori, învechit, *dispoziția curbelor integrale* în plan [11, pag. 255] — este realizat *fără aducerea* preliminară a matricei sistemului diferențial *la forma canonică* (Jordan). Aceasta pentru a evita discuția despre cum influențează transformările punctuale ale planului orbitele sistemului dinamic (*cum* sau *dacă* se alterează valorile *curburii* ori *când* se schimbă *semnul* ei ș.a.m.d.). În plus, trebuie să ne obișnuim cu forma întâlnită în practică a portretului și nu cu *imaginea de vitrină* a acestuia.

Porțiuni ale lucrării de față au fost prezentate studenților Universității din Craiova, de la specializarea *matematică informatică*, participanți la cursurile EDI (Ecuații diferențiale I) și SD (Sisteme dinamice).

Craiova, [March 31, 2026]

O.G.M.

Cuprins

1	Sisteme de ecuații diferențiale ordinare, liniare și omogene	1
1.1	Cazul ecuațiilor de ordinul I cu coeficienți constanți. Rezolvări în corpul \mathbb{R}	1
1.1.1	Extinderea la \mathbb{C}^2	1
1.1.2	Analiza sistemului (1.1)	2
1.2	Intervalul lui W. Fite. Estimarea lui R. Bellman. Chestiunea unicității	17
2	Orbite în planul fazelor pentru ecuația diferențială, liniară și omogenă, de ordinul al doilea	23
2.1	Grupul de transformări uniparametric al sistemului (1.1)	23
2.1.1	Formulele soluției generale a sistemului (1.1)	23
2.1.2	Grupul de izomorfisme atașat sistemului (1.1)	27
2.1.3	Orbitele sistemului (1.1)	30
2.2	Ecuația oscilatorului liniar amortizat	33
2.2.1	Cazul $trace < 0, det > 0, discr > 0$	34
2.2.2	Cazul $trace < 0, det > 0, discr = 0$	41
2.2.3	Cazul $trace < 0, det > 0, discr < 0$	43
2.2.4	Cazul $trace > 0, det > 0, discr < 0$	50
2.2.5	Cazul $trace \in \mathbb{R}, det < 0$	51
2.2.6	Cazul $trace = 0, det > 0$	55
2.2.7	Clasificarea echilibrului $(0,0)^T$ în cazul $det \neq 0$	57
2.3	Cinematică în plan: o schiță	58
3	RK4: o metodă monopas cu patru stadii	63
3.1	Generalități	63
3.2	Construcția relațiilor de recurență. Matricea H_4	65
3.3	Captarea soluțiilor periodice	71
4	Realizarea ilustrațiilor	81
4.1	Un script Python	81

4.2	Un fișier SVG	86
4.3	Ilustrații 3D	88
A	Homeomorfismul $(t \in \mathbb{R}) \mapsto \overline{\mathcal{F}}(t)$ al orbitelor nemărginite	95
A.1	Cazul $\text{trace} < 0, \text{det} > 0, \text{discr} < 0$	95
A.2	Cazul $\text{trace} < 0, \text{det} > 0, \text{discr} = 0$	99
A.3	Cazul $\text{trace} < 0, \text{det} > 0, \text{discr} > 0$	100
	Referințe Bibliografice	105
	Index	107

Lista de Figuri

2.1	Graficul (în portocaliu) și proiecția (în albastru a) acestuia pe planul fazelor pentru soluția $(x, x')^T$, a sistemului 2×2 echivalent ecuației diferențiale $x'' + x = 0$, cu data impusă $x(0) = 1, x'(0) = 0$. Soluția a fost calculată pentru $t \in [0, 7.8]$ ca să i se evidențieze <i>periodicitatea</i> .	32
2.2	Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + 3x' + 2x = 0$. Aici, trace < 0 , det > 0 , discr > 0 .	35
2.3	Regula paralelogramului: descompunerea vectorilor \vec{r}, \vec{v} după direcțiile \vec{u}_1, \vec{u}_2 .	38
2.4	Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + 2x' + x = 0$. Aici, trace < 0 , det > 0 , discr $= 0$.	41
2.5	Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + x' + 9x = 0$. Aici, trace < 0 , det > 0 , discr < 0 .	46
2.6	Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' - x' + 9x = 0$. Aici, trace > 0 , det > 0 , discr < 0 .	50
2.7	Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + 2x' - 3x = 0$. Aici, trace $\in \mathbb{R}$, det < 0 .	53
2.8	Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + 4x = 0$. Aici, trace $= 0$, det > 0 .	56
2.9	Caracterizarea echilibrului trivial al sistemului diferențial (1.1), atunci când det $\neq 0$, în funcție de mărimile trace , det , discr .	57
2.10	Rotații cu 90° în plan: în sens trigonometric, $M(x, y) \rightarrow N(-y, x)$, și în sens invers trigonometric, $M(x, y) \rightarrow P(y, -x)$.	58
4.1	Cercul <i>datelor impuse</i> pentru calculul portretului fazelor.	85
4.2	Portretul fazelor (incomplet) pentru ecuația diferențială $x'' + 3x' + 2x = 0$.	86
4.3	Calculul lungimii segmentelor AG și CG în paralelogramul $ABCD$.	89
4.4	Correspondențele dintre reperul cartezian <i>imaginar</i> Ox_1y_1 și cel <i>adevărat</i> OXY : punctul $M(OB, OV, OD) \equiv M(OG, GM)$ din spațiul trei-dimensional și proiecția sa în planul fazelor $N(OB, OV, 0) \equiv N(OK, KN)$.	90

- 4.5 Graficul (în portocaliu) și proiecția (în albastru a) acestuia (incomplete) pe planul fazelor pentru soluția $(x, x')^T$, a sistemului 2×2 echivalent ecuației diferențiale $x'' + x = 0$, cu data impusă $x(0) = 1, x'(0) = 0$. Soluția a fost calculată pentru $t \in [0, 7.8]$ ca să se evidențieze *periodicitatea*. 91
- A.1 “Bucle interzise” pentru orbitele *nemărginite*: punctul de autointersecție M_1 nu poate exista datorită *injectivității* parametrizării $t \mapsto \bar{r}(t)$. Punctul $M_2 = M_2(t_0)$ pentru care $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{r}(t_n) = \bar{r}(t_0)$, unde șirul $(t_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ satisface una din condițiile $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \pm\infty$, nu poate fi întâlnit aici din cauza *estimării* (A.3). Vezi și [2, pag. 89]. 97

Capitolul 1

Sisteme de ecuații diferențiale ordinare, liniare și omogene

1.1 Cazul ecuațiilor de ordinul I cu coeficienți constanți. Rezolvări în corpul \mathbb{R}

Fie sistemul diferențial scris în *formă normală* [11, pag. 9]

$$\begin{cases} u'(t) = a \cdot u(t) + b \cdot v(t), \\ v'(t) = c \cdot u(t) + d \cdot v(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

cu matricea *coeficienților*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \quad (1.2)$$

Prin *soluție* a acestui sistem înțelegem o pereche de funcții $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ale cărei componente u și v au derivate continue de *orice* ordin natural ($u, v \in C^k, k \in \mathbb{N}$) și satisfac în mod identic ecuațiile (1.1) pe *întreg domeniul de definiție*.

Pentru simplitate, sistemul este prezentat adesea în *formă matriceală* [11, pag. 192] și lipsit de argumentul t al funcțiilor:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.1.1 Extinderea la \mathbb{C}^2

Uneori, fără a utiliza notații speciale, vom considera că o anumită soluție a sistemului diferențial ia valori complexe — la fiecare din componentele sale —. Aceasta pentru că *admitem* valabilitatea următoarei identități:

$$(u'(t) =) \quad \frac{d}{dt} [(\operatorname{Re} u)(t) + i \cdot (\operatorname{Im} u)(t)] = (\operatorname{Re} u)'(t) + i \cdot (\operatorname{Im} u)'(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $(\operatorname{Re} u)(t)$, $(\operatorname{Im} u)(t)$ desemnează *partea reală*, respectiv *partea imaginară* a numărului $u(t) \in \mathbb{C}$ și $i^2 = -1$.

Pe baza ei, matriceal, putem scrie că

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} [(\operatorname{Re} u)(t) + i \cdot (\operatorname{Im} u)(t)] \\ \frac{d}{dt} [(\operatorname{Re} v)(t) + i \cdot (\operatorname{Im} v)(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} u)'(t) + i \cdot (\operatorname{Im} u)'(t) \\ (\operatorname{Re} v)'(t) + i \cdot (\operatorname{Im} v)'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} u)'(t) \\ (\operatorname{Re} v)'(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} (\operatorname{Im} u)'(t) \\ (\operatorname{Im} v)'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deoarece

$$A \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} u)(t) \\ (\operatorname{Re} v)(t) \end{pmatrix} + i \cdot A \begin{pmatrix} (\operatorname{Im} u)(t) \\ (\operatorname{Im} v)(t) \end{pmatrix},$$

deducem că soluția¹ $(u, v)^T$ ale cărei componente iau valori complexe se află într-o corespondență biunivocă cu o pereche de soluții ale sistemului (1.1):

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} u \\ \operatorname{Re} v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Im} u \\ \operatorname{Im} v \end{pmatrix}.$$

Astfel, avem de rezolvat un sistem diferențial, liniar și omogen, cu patru ecuații și patru necunoscute — 4×4 — pe care îl prezentăm *pe blocuri*, adică

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} u \\ \operatorname{Re} v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \operatorname{Im} u \\ \operatorname{Im} v \end{pmatrix} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} u \\ \operatorname{Re} v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \operatorname{Im} u \\ \operatorname{Im} v \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Deci, a căuta soluțiile $(t \in \mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ înseamnă a rezolva simultan două sisteme (1.1) care pot fi tratate *independent* unul de celălalt.

În particular, orice soluție *reală* a sistemului diferențial poate fi considerată drept *partea reală* a unei soluții *complexe* [2, pag. 144]:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

1.1.2 Analiza sistemului (1.1)

Lema 1.1. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ o valoare proprie simplă [9, pag. 35] a matricei A și $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un vector propriu corespunzându-i lui λ . Atunci, funcțiile

¹ Cu indicele plasat superior \star^T desemnăm *transpusa* unei matrice.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

verifică sistemul diferențial.

Demonstrație. Avem egalitățile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} U \\ e^{\lambda t} V \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} \cdot U \\ \lambda e^{\lambda t} \cdot V \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \cdot \lambda \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda t} \cdot A \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \\ &= A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Am utilizat-o pe prima din relațiile fundamentale de calcul

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}, \quad \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(s) ds = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_1} u(s) ds \\ \int_{t_0}^{t_1} v(s) ds \end{pmatrix}, \quad t, t_0, t_1 \in \mathbb{R},$$

de ajutor la simplificarea scrierii formulelor. Stabilirea acestora — adică, a calculului diferențial și integral realizat *pe componente* — se bazează pe întrebuintărea *distanței euclidiene* în spațiul liniar real \mathbb{R}^2 .

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 1.2. Fie $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o valoare proprie a matricei A și $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ un vector propriu corespunzându-i lui λ . Atunci, pentru orice $C \in \mathbb{C}$, funcțiile

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

verifică sistemul diferențial.

Demonstrație. Introducem numerele reale α, β , cu $\beta \neq 0$, astfel ca $\lambda = \alpha + i\beta$. Conform formulei lui (L.) Euler,

$$\begin{aligned} (e^{\lambda t})' &= [e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)]' \\ &= (\alpha + i\beta) \cdot e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \\ &= \lambda \cdot e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Odată cunoscută valoarea acestei derivate, putem urma pașii de la Lema 1.1.

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 1.3. Fie $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o valoare proprie a matricei A și $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ un vector propriu corespunzându-i lui λ . Atunci:

$$1) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2;$$

2) dacă notăm cu $\bar{\lambda}$ conjugatul complex al unui număr (complex), atunci $\bar{\lambda}$ este valoare proprie a matricei A iar $\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix}$ este vector propriu corespunzându-i lui $\bar{\lambda}$;

3) vectorii

$$\left\{ \operatorname{Re} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \operatorname{Im} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right\}$$

sunt liniar independenți [2, pag. 159] peste corpul \mathbb{R} ;

4) vectorii

$$\left\{ \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} \right\}$$

sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{C} ;

5)

$$\overline{e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}} = e^{\bar{\lambda} t} \cdot \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. 1) Presupunem că, prin absurd, $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Cum el este vector propriu, deci *nenul*, presupunem și că $U \neq 0$.

Au loc relațiile

$$A \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aU + bV \\ cU + dV \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

respectiv

$$A \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda U \\ \lambda V \end{pmatrix}.$$

De unde, $\begin{pmatrix} \lambda U \\ \lambda V \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ și, în particular, $\lambda U \in \mathbb{R}$. Cum U este nenul, am ajuns la o contradicție: $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Relația $A \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ se scrie, cu ecuații scalare, astfel:

$$\begin{cases} aU + bV = \lambda U, \\ cU + dV = \lambda V, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{aligned} \overline{aU + bV} &= a \cdot \bar{U} + b \cdot \bar{V} \\ &= \bar{\lambda} U = \bar{\lambda} \cdot U, \\ c \cdot \bar{U} + d \cdot \bar{V} &= \bar{\lambda} \cdot \bar{V}. \end{aligned}$$

Matriceal, am ajuns la

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

3) Cum $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, cel puțin unul dintre numerele U și V se găsește în $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Introducem expresiile

$$\begin{cases} \lambda = \alpha + i\beta, & \beta \neq 0, \\ U = U_1 + iU_2, \\ V = V_1 + iV_2, & U_{1,2}, V_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad U_2^2 + V_2^2 > 0. \end{cases}$$

Atunci,

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

și

$$A \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + i \left[A \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right],$$

respectiv

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= (\alpha + i\beta) \left[\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\alpha \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right] + i \left[\alpha \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Egalând între ele părțile reale și, separat, imaginare ale elementelor egalității

$A \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, ajungem la:

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}, \\ A \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Presupunem că, prin absurd, există $\gamma \in \mathbb{R}$ cu $\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \neq O_{21}$. Folosim notația² $O_{21} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De unde,

² Întrebuițăm operatorul *morsă* := la *definiri* de obiecte matematice: nume := valoare. Astfel, unui nume i se *atribuie* o valoare.

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = (\alpha - \beta\gamma) \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \\ \gamma \cdot A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = (\alpha\gamma + \beta) \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Conform primei ecuații din (1.3), matricea A admite valoarea proprie $\alpha - \beta\gamma$. Am ajuns la o contradicție: A posedă, deja, valorile proprii nereale $\lambda, \bar{\lambda}$.

A mai rămas de eliminat situația când $\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = O_{21}$ — adică, vectorul propriu $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ ar fi *pur imaginar* —. Egalitatea $A \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ devine

$$iA \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = (-\beta + i\alpha) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

de unde $\beta \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = O_{21}$. Din nou, o contradicție.

4) Să presupunem că există $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cu proprietatea că $W := \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, $W \in \mathbb{C}^2$. Au loc egalitățile

$$O_{21} = \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} - C \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

și

$$\begin{aligned} O_{21} &= A \cdot O_{21} = A \left[\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} - C \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right] \\ &= A \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} - C \cdot A \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} - C \cdot \lambda \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} - \lambda \cdot C \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \\ &= (\bar{\lambda} - \lambda) \cdot \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} = (\bar{\lambda} - \lambda)W. \end{aligned}$$

Cum $W \neq O_{21}$, am ajuns la o contradicție: $\lambda = \bar{\lambda}$.

5) Sunt valabile relațiile:

$$\begin{aligned} \overline{e^{\lambda t}} &= \overline{e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) \\ &= e^{\alpha t} \cdot [\cos((- \beta)t) + i \sin((- \beta)t)] \\ &= e^{\alpha t} \cdot e^{(-\beta t) \cdot i} = e^{(\alpha - i\beta)t} \\ &= e^{\bar{\lambda} t}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Demonstrațiile următoarelor două leme nu sunt necesare pentru a înțelege calculele din materialul de față.

Lema 1.4. (Estimarea lui R. Bellman) *Dacă funcțiile $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ sunt o soluție a sistemului diferențial (1.1), atunci are loc inegalitatea:*

$$|u(t)| + |v(t)| \leq (|u(0)| + |v(0)|) \cdot e^{(|a|+|b|+|c|+|d|) \cdot |t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Demonstrație. Justificarea este realizată la Teorema 1.2. \square

Această estimare a lui (R.) Bellman permite o soluționare rapidă a așa-numitei chestiuni a unicității.

Lema 1.5. (Chestiunea unicității) *Fie $t_0 \in \mathbb{R}$ și $(u_0, v_0)^T \in \mathbb{R}^2$ oarecare. Atunci, sistemul diferențial (1.1) admite cel mult o soluție $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ cu proprietatea că*

$$\begin{pmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Demonstrație. Justificarea se realizează la Teorema 1.3. \square

Este ușor de intuit la ce servește chestiunea unicității: atunci când găsim, printr-un *truc* oarecare, o soluție a sistemului diferențial care să verifice (și) o *dată impusă* de o anumită problemă, chestiunea unicității ne asigură că soluția găsită este *singura* posibilă.

Lema 1.6. *Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sunt valorile proprii reale ale matricei A iar $(U_1, V_1)^T$ și $(U_2, V_2)^T$, din \mathbb{R}^2 , sunt vectori proprii corespunzându-le lui λ_1 , respectiv lui λ_2 , atunci sunt adevărate afirmațiile:*

- 1) vectorii $\left\{ \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right\}$ reprezintă o bază a spațiului liniar \mathbb{R}^2 peste corpul \mathbb{R} ;
- 2) soluția generală [11, pag. 13] a sistemului diferențial are formula

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. 1) Folosim tehnica de la Lema 1.3, punctul 4).

2) Conform Lemei 1.1, toate aceste formule verifică sistemul diferențial. Pentru a dovedi că nu există alte soluții, introducem *data impusă*

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

unde $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ este fixat arbitrar.
Atunci,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (0) &= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\
&= \left[C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right] \Big|_{t=0} \\
&= \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Deoarece *coloanele* matricei sistemului algebric

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

formează o bază a spațiului liniar real \mathbb{R}^2 , sistemul algebric este *cramerian*, ceea ce ne conduce la

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{U_1 V_2 - U_2 V_1} \begin{pmatrix} V_2 & -U_2 \\ -V_1 & U_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Chestiunea unicității ne asigură că acestea sunt singurele soluții care pot verifica datele impuse.

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 1.7. *Dacă $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o valoare proprie a matricei A iar $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ este un vector propriu corespunzător ei, atunci toate funcțiile de forma*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{\bar{\lambda} t} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $C_{1,2} \in \mathbb{C}$, sunt soluții complexe ale sistemului diferențial.

Demonstrație. Folosim Lema 1.2 și observația că suma a două soluții ale sistemului (1.1) este tot o soluție a sistemului respectiv. \square

Lema 1.8. *Introducem expresiile*

$$C_1 = D_1 + iD_2, \quad U = U_1 + iU_2, \quad V = V_1 + iV_2, \quad \lambda = \alpha + i\beta,$$

unde $D_{1,2}, U_{1,2}, V_{1,2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci, este valabilă formula:

$$\begin{aligned}
C_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= e^{\alpha t} \left[\begin{pmatrix} (D_1 U_1 - D_2 U_2) & (-D_1 U_2 - D_2 U_1) \\ (D_1 V_1 - D_2 V_2) & (-D_1 V_2 - D_2 V_1) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + i \begin{pmatrix} (D_1 U_2 + D_2 U_1) & (D_1 U_1 - D_2 U_2) \\ (D_1 V_2 + D_2 V_1) & (D_1 V_1 - D_2 V_2) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Demonstrație. Prin înlocuirea expresiilor, avem

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \begin{pmatrix} U_1 + iU_2 \\ V_1 + iV_2 \end{pmatrix} \\
&= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} (U_1 \cos \beta t - U_2 \sin \beta t) + i(U_1 \sin \beta t + U_2 \cos \beta t) \\ (V_1 \cos \beta t - V_2 \sin \beta t) + i(V_1 \sin \beta t + V_2 \cos \beta t) \end{pmatrix} \\
&= e^{\alpha t} \left[\begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ V_1 - V_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 1.9. În ipotezele Lemei 1.7, dacă alegem

$$C_2 = \overline{C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{C},$$

atunci obținem toate formulele soluțiilor cu valori reale ale sistemului diferențial.

Demonstrație. Conform Lemei 1.3, punctul 5), formula

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + C_2 e^{\overline{\lambda} t} \begin{pmatrix} \overline{U} \\ \overline{V} \end{pmatrix}$$

devine

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + C_2 \cdot \overline{e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}} \\
&= C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \overline{C_1} \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \\
&= C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \overline{C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}} \\
&= 2 \operatorname{Re} \left[C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right] \\
&= 2e^{\alpha t} \begin{pmatrix} D_1 U_1 - D_2 U_2 & -D_1 U_2 - D_2 U_1 \\ D_1 V_1 - D_2 V_2 & -D_1 V_2 - D_2 V_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ultima expresie are valori în \mathbb{R}^2 pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și verifică sistemul diferențial.

La fel ca la Lema 1.6, introducem data impusă

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

unde $(u_0, v_0)^T \in \mathbb{R}^2$ este fixat arbitrar.

Avem

$$\left[2e^{\alpha t} \begin{pmatrix} D_1 U_1 - D_2 U_2 & -D_1 U_2 - D_2 U_1 \\ D_1 V_1 - D_2 V_2 & -D_1 V_2 - D_2 V_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} \right] \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\begin{cases} D_1 U_1 - D_2 U_2 = \frac{u_0}{2}, \\ D_1 V_1 - D_2 V_2 = \frac{v_0}{2} \end{cases}$$

și

$$\begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ V_1 - V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_0}{2} \\ \frac{v_0}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Aici, coloanele matricei sistemului algebric de ecuații în necunoscutele D_1 și D_2 sunt vectorii

$$\left\{ \operatorname{Re} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, -\operatorname{Im} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right\}.$$

Conform punctului 3) al Lemei 1.3, ei sunt liniar independenți în spațiul vectorial \mathbb{R}^2 peste corpul \mathbb{R} , deci sistemul (1.5) este cramerian.

Așadar, dacă $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este valoare proprie a matricei A iar $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ este un vector propriu corespunzându-i lui λ , atunci soluția generală a sistemului diferențial are expresia

$$\operatorname{Re} \left[C \cdot e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right], \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $C = C_1 + iC_2 \in \mathbb{C}$ iar constantele³ reale C_1 și C_2 ne vor da, prin particularizare, toate soluțiile posibile [2, pag. 164].

Justificarea s-a încheiat. \square

Exercițiul 1.1. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ valoarea proprie dublă a matricei A . Dacă *multiplicitatea sa geometrică*, adică dimensiunea subspațiului vectorial real al lui \mathbb{R}^2 format din vectorii proprii corespunzându-i lui λ , este *doi*, atunci să se rezolve sistemul diferențial (1.1).

Soluția exercițiului 1.1. Deoarece dimensiunea spațiului liniar real \mathbb{R}^2 este tot *doi*, deducem că *toți* vectorii din \mathbb{R}^2 îi sunt vectori proprii, corespunzându-i lui λ , matricei A . Adică,

$$A \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

pentru orice $(U, V)^T \in \mathbb{R}^2$.

³ Ele sunt așa-numitele *constante de integrare*.

Introducând în relație valorile $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, respectiv $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, obținem⁴ că

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2.$$

Sistemul diferențial a devenit

$$\begin{cases} u' = \lambda u, \\ v' = \lambda v. \end{cases}$$

Cele două ecuații ale sale se pot rezolva⁵ în mod separat:

$$u(t) = C_1 e^{\lambda t}, \quad v(t) = C_2 e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$ sunt constantele de integrare. Vectorial, am obținut o formulă asemănătoare celei de la Lema 1.6, și anume

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ &= C_1 \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluția s-a încheiat. \square

Exercițiul 1.2. (*Matrice cu defect*) Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ valoarea proprie dublă a matricei A și să presupunem că multiplicitatea ei geometrică este *unu*. Atunci,

$$(A - \lambda \cdot I_2)^2 = O_2.$$

Soluția exercițiului 1.2. *Ecuația caracteristică* [9, pp. 29, 36] pe care o verifică λ are expresia $\det(A - z \cdot I_2) = 0$, unde $z \in \mathbb{C}$, ceea ce se rescrie drept

$$z^2 - (a + d) \cdot z + (ad - bc) = 0,$$

adică

$$z^2 - \text{trace}(A) \cdot z + \det(A) = 0.$$

Aici, $\text{trace}(A) := a + d$ desemnează *urma*⁶ matricei A iar $\det(A) := ad - bc$ *determinantul* acesteia.

Dat fiind că λ este rădăcina dublă a ecuației în z , *discriminantul* ecuației se anulează:

⁴ Folosim notațiile tipice: $I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, respectiv $O_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

⁵ Observăm că prima ecuație se rescrie drept $e^{\lambda t} \cdot \frac{d}{dt} [u(t) \cdot e^{-\lambda t}] = 0$.

⁶ În englezește, *trace*.

$$\Delta_z := [\text{trace}(A)]^2 - 4 \cdot \det(A) = 0,$$

de unde $\det(A) = \frac{1}{4} [\text{trace}(A)]^2$, respectiv $\lambda = \frac{\text{trace}(A)}{2}$.

Desfăcând parantezele, avem

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_2)^2 &= A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 I_2 \\ &= A^2 - \text{trace}(A)A + \frac{[\text{trace}(A)]^2}{4} I_2 \\ &= A^2 - \text{trace}(A)A + \det(A)I_2. \end{aligned}$$

Conform *teoremei Hamilton-Cayley*, matricea A își verifică ecuația caracteristică:

$$A^2 - \text{trace}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2.$$

Soluția s-a încheiat. \square

Lema 1.10. În contextul *Exercițiului 1.2*, există $\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O_{21}\}$ astfel ca

$$(A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \neq O_{21}. \quad (1.6)$$

Atunci,

1) vectorul

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

îi este vector propriu, corespunzându-i lui λ , matricei A ;

2) vectorii

$$\left\{ \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right\}$$

sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{R} .

Demonstrație. 2) Deoarece spațiul vectorial real al vectorilor proprii corespunzându-i lui λ are dimensiunea *unu*, există $\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O_{21}\}$ care să nu fie vector propriu matricei A , adică un vector pentru care să aibă loc (1.6).

Presupunem că, prin absurd, ar exista $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} &= (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \\ &= C \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De aici ar rezulta că

$$[A - (\lambda + C)I_2] \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = O_{21},$$

adică $\lambda + C \neq \lambda$ i-ar fi *valoare proprie* matricei A . Am ajuns, evident, la o contradicție.

1) Conform Exercițiului 1.2,

$$\begin{aligned} O_{21} &= (A - \lambda I_2)^2 \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = (A - \lambda I_2) \left[(A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cum $\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \neq O_{21}$, el îi este vector propriu matricei A .

Așadar, dacă $(A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \neq O_{21}$, atunci vectorii

$$\left\{ \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}, (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right\}$$

formează o bază a spațiului liniar \mathbb{R}^2 peste corpul \mathbb{R} .

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 1.11. În contextul Lemei 1.10, funcțiile

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right], \quad t \in \mathbb{R},$$

alcătuiesc o soluție a sistemului diferențial.

Demonstrație. Sunt valabile relațiile

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) &= \lambda e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] + e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda t} \left[\lambda \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] + t e^{\lambda t} \cdot \left[\lambda \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{\lambda t} \left[\lambda \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] + t e^{\lambda t} \cdot \left[A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{\lambda t} \left[\lambda \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right] + t e^{\lambda t} \left[A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{\lambda t} \left[A \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \right] + t e^{\lambda t} \left[A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] \\ &= A \left\{ e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 1.12. Soluția generală a sistemului diferențial, în contextul Exercițiului 1.2 — adică, al matricei A cu defect —, este

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right], \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. Conform Lemei 1.10, $\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$ este vector propriu al matricei A , deci, la fel ca la Lema 1.1,

$$\begin{aligned} \left[C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right]' &= C_1 e^{\lambda t} \left[\lambda \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] = C_1 e^{\lambda t} \cdot A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \\ &= A \cdot \left[C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

De asemeni, conform Lemei 1.11,

$$\left\{ C_2 e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] \right\}' = A \cdot \left\{ C_2 e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

Cum suma a două soluții ale sistemului (1.1) îi este ea-însăși soluție, deducem că toate funcțiile $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ cu formula din enunț verifică sistemul diferențial.

Pe baza Lemei 1.5, introducem data impusă

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

fixată arbitrar.

Atunci,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} &= \left\{ C_1 \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \right] \right\} \Big|_{t=0} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conform Lemei 1.10, punctul 2), matricea $\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix}$ este *nesingulară*, astfel că sistemul algebric în necunoscutele C_1 și C_2 exprimat de relația

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

este cramerian.

Observăm că *soluția generală poate fi reorganizată drept*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

adică cu componente de forma polinom de gradul întâi în t ori exponențială [9, pag. 32].

Justificarea s-a încheiat. \square

Exercițiul 1.3. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a-d)^2 + 4bc = 0$ și $b \cdot c \neq 0$. Atunci, să se arate că:

1) matricea A are valoarea proprie dublă $\lambda = \frac{a+d}{2}$;

2) vectorul $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d-a}{2b} \end{pmatrix}$ îi este vector propriu matricei A ;

3) vectorii

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d-a}{2b} \end{pmatrix}, \frac{1}{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{R} .

Soluția exercițiului 1.3. 1) Remarcăm că $\det(A) = \frac{[\text{trace}(A)]^2}{4}$.

2) Prima relație din enunț se rescrie ca $\frac{d-a}{2b} = \frac{2c}{a-d}$. De aici rezultă că

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d-a}{2b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} \\ c + d \cdot \frac{2c}{a-d} \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2c}{a-d} \end{pmatrix}.$$

3) Observăm că matricea ale cărei coloane sunt date de componentele celor doi vectori are determinantul $\frac{1}{b}$. Astfel, orice combinație liniară nulă, cu coeficienți reali, a celor doi vectori ne va conduce la un sistem cramerian liniar și omogen. De unde va rezulta că nu putem avea decât coeficienți nuli pentru combinația liniară nulă în cauză.

Dubla egalitate

$$\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ b \end{pmatrix} = (A - \lambda I_2) \cdot \frac{1}{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d-a}{2b} \end{pmatrix}$$

îi este echivalentă punctului 1) de la Lema 1.10.

Soluția s-a încheiat. \square

Exercițiul 1.4. Rezolvați sistemul diferențial

$$\begin{cases} u' = 2u + v, \\ v' = -u. \end{cases}$$

Soluția exercițiului 1.4. Observăm că sunt îndeplinite ipotezele Exercițiului 1.3, respectiv că matricea sistemului, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, este o *matrice cu defect*. Putem, așadar, aplica Lema 1.12 folosind vectorii de la punctul 3) al Exercițiului 1.3.

Pe de altă parte, plecând de la concluzia că formulele $u(t)$, $v(t)$ trebuie să aibă forma unui polinom de gradul întâi în t înmulțit cu $e^{\lambda t}$, pornim pe o *scurtătură*⁷: căutăm soluții exprimate ca

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t}, \quad \lambda = 1,$$

unde $a_{1,2}, b_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Egalând coeficienții corespunzători ai polinoamelor de gradul întâi formate, ajungem la relațiile

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = b_1, \\ b_1 + b_2 = 0. \end{cases}$$

Introducem cele două constante de integrare: $b_1 = C_1$, $a_1 = C_2$, unde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$, și obținem soluțiile:

$$u(t) = (C_2 + C_1 t)e^t, \quad v(t) = (C_1 - C_2 - C_1 t)e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soluția s-a încheiat. \square

Exercițiul 1.5. Fie $z \in \mathbb{C}$ și matricea

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci, dacă $z \neq 0$,

1) matricea M admite valorile proprii $\lambda_i = \pm z$ cărora le corespund vectorii proprii

$$\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm z \end{pmatrix}, \quad \text{unde } i \in \{1, 2\};$$

2) sunt valabile identitățile

$$\begin{vmatrix} x(t) & e^{zt} & e^{-zt} \\ x'(t) & ze^{zt} & -ze^{-zt} \\ x''(t) & z^2 e^{zt} & z^2 e^{-zt} \end{vmatrix} = -2z [x''(t) - z^2 x(t)], \quad t \in \mathbb{R},$$

respectiv

$$\left\{ e^{-2zt} [e^{zt} x(t)]' \right\}' = e^{-zt} [x''(t) - z^2 x(t)], \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de două ori *continuu diferențiabilă* — $x \in C^2$ —, și, dacă $z = 0$,

⁷ Cunoscută sub numele de *metoda coeficienților nedeterminați*.

3) matricea M este *cu defect* iar, în contextul Lemei 1.10,

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluția exercițiului 1.5. 2) Dezvoltăm determinantul după prima coloană.

Soluția s-a încheiat. \square

Exercițiul 1.6. (Ecuația $x'' + \Delta \cdot x = 0$) Fie $\Delta \in \mathbb{R}$ și ecuația diferențială ordinară, liniară și omogenă,

$$x''(t) + \Delta \cdot x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Atunci, soluția sa generală are următoarea expresie:

1) dacă $\Delta = -\omega^2$ și $\omega > 0$ este fixat arbitrar,

$$C_1 \cdot e^{\omega t} + C_2 \cdot e^{-\omega t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

2) dacă $\Delta = \omega^2$ și $\omega > 0$ este fixat arbitrar,

$$C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t), \quad t \in \mathbb{R},$$

3) dacă $\Delta = 0$,

$$C_1 + C_2 \cdot t, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Soluția exercițiului 1.6. 1) Folosim Exercițiul 1.5, punctul 1), cu $z = \omega$ și Lema 1.6, punctul 2).

2) Folosim Exercițiul 1.5, punctul 1), cu $z = i\omega$ și Lema 1.9.

3) Pentru completitudine, putem folosi Exercițiul 1.5, punctul 3) și Lema 1.12.

Soluția s-a încheiat. \square

1.2 Intervalul lui W. Fite. Estimarea lui R. Bellman. Chestiunea unicității

Rezultatele din această secțiune sunt considerate de pionierat în studiile privitoare la ecuațiile diferențiale ordinare. Astfel, ele se regăsesc în teoria stabilității [4], teoria oscilațiilor [1], ș.a.m.d. Demonstrațiile lor se bazează pe aceeași tehnică de calcul.

Teorema 1.1. (Intervalul lui W. Fite [8]) *Dacă matricea A este nenulă, dacă funcțiile $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ sunt o soluție a sistemului diferențial (1.1) și nu sunt identic nule și dacă există*

$t_0 \neq t_1 \in (A, B)$, unde (A, B) este un subinterval mărginit al lui \mathbb{R} , cu proprietatea că $u(t_0) = v(t_1) = 0$, atunci are loc inegalitatea:

$$B - A \geq \frac{1}{|a| + |b| + |c| + |d|}.$$

Demonstrație. Fixăm numărul $t \in [t_0, B]$. Atunci, conform teoremei Leibniz-Newton,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t u'(s) ds &= \int_{t_0}^t [a \cdot u(s) + b \cdot v(s)] ds \\ &= u(t) - u(t_0) = u(t). \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea triunghiului, deducem că

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \int_{t_0}^t [|a| \cdot |u(s)| + |b| \cdot |v(s)|] ds \leq \int_{t_0}^t (|a| + |b|) \cdot (|u(s)| + |v(s)|) ds \\ &\leq \int_{t_0}^t (|a| + |b|) ds \cdot (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) = (t - t_0) \cdot (|a| + |b|) (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) \\ &\leq (B - A) (|a| + |b|) (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty), \end{aligned}$$

unde $\|u\|_\infty := \sup_{q \in [A, B]} |u(q)|$.

La fel, dacă fixăm $t \in [A, t_0]$, ajungem la inegalitatea

$$|u(t)| = \left| - \int_t^{t_0} u'(s) ds \right| \leq (B - A) (|a| + |b|) (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty).$$

Dată fiind continuitatea funcției u , deducem că există (cel puțin) un număr $q_0 \in [A, B]$ astfel încât

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &= \max_{q \in [A, B]} |u(q)| = |u(q_0)| \\ &\leq (B - A) (|a| + |b|) (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty). \end{aligned}$$

În același fel, stabilim valabilitatea estimării:

$$\|v\|_\infty \leq (B - A) (|c| + |d|) (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty).$$

Apoi, prin sumarea ultimelor două inegalități, ajungem la

$$\|u\|_\infty + \|v\|_\infty \leq (B - A) (|a| + |b| + |c| + |d|) \cdot (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty),$$

de unde, ținând seama că $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty > 0$, concludem:

$$1 \leq (B - A) (|a| + |b| + |c| + |d|).$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Teorema 1.2. ([4]) *Dacă funcțiile $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ sunt o soluție a sistemului diferențial (1.1), atunci are loc inegalitatea:*

$$|u(t)| + |v(t)| \leq (|u(0)| + |v(0)|) \cdot e^{(|a|+|b|+|c|+|d|) \cdot |t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Fixăm numărul $t \geq 0$. La fel ca la Teorema 1.1,

$$\begin{cases} \int_0^t u'(s) ds = u(t) - u(0) \\ \quad = \int_0^t [a \cdot u(s) + b \cdot v(s)] ds, \\ \int_0^t v'(s) ds = v(t) - v(0) \\ \quad = \int_0^t [c \cdot u(s) + d \cdot v(s)] ds. \end{cases}$$

Aplicând inegalitatea triunghiului, avem

$$\begin{cases} |u(t)| \leq |u(0)| + \int_0^t [|a| \cdot |u(s)| + |b| \cdot |v(s)|] ds \\ \quad \leq |u(0)| + \int_0^t (|a| + |b|) \cdot [|u(s)| + |v(s)|] ds, \\ |v(t)| \leq |v(0)| + \int_0^t [|c| \cdot |u(s)| + |d| \cdot |v(s)|] ds \\ \quad \leq |v(0)| + \int_0^t (|c| + |d|) \cdot [|u(s)| + |v(s)|] ds. \end{cases}$$

De aici,

$$|u(t)| + |v(t)| \leq |u(0)| + |v(0)| + \int_0^t (|a| + |b| + |c| + |d|) \cdot [|u(s)| + |v(s)|] ds.$$

Cum t este un număr oarecare, deducem că am ajuns la următoarea inegalitate [4, pag. 35, Lemma 1]:

$$W(q) \leq W(0) + \int_0^q C \cdot W(s) ds, \quad q \geq 0, \quad (1.7)$$

unde $W(q) := |u(q)| + |v(q)|$ și $C := |a| + |b| + |c| + |d|$. În particular, pentru $C = 0$, aceasta este chiar inegalitatea din enunț:

$$|u(q)| + |v(q)| \leq |u(0)| + |v(0)| = [|u(0)| + |v(0)|] \cdot e^{0 \cdot q}, \quad q \geq 0.$$

Adăugăm ipoteza *temporară* $C > 0$. Observăm că inegalitatea (1.7) se rescrie după cum urmează:

$$\begin{aligned} W(q) - C \cdot \int_0^q W(s) ds &= e^{C \cdot q} \cdot \frac{d}{dq} [e^{-C \cdot q} \cdot \int_0^q W(s) ds] \\ &\leq W(0), \quad q \geq 0. \end{aligned}$$

Pe baza teoremei Leibniz-Newton,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dq} [e^{-Cq} \cdot \int_0^q W(s) ds] dq &= e^{-Ct} \cdot \int_0^t W(s) ds \\ &\leq W(0) \cdot \int_0^t e^{-Cq} dq = W(0) \cdot \frac{1-e^{-Ct}}{C}. \end{aligned}$$

De aici,

$$\int_0^t W(s) ds \leq W(0) \cdot \frac{e^{Ct} - 1}{C},$$

respectiv

$$\begin{aligned} W(t) &\leq W(0) + C \cdot \int_0^t W(s) ds \\ &\leq W(0) + W(0) \cdot (e^{Ct} - 1) \\ &= W(0) \cdot e^{Ct}. \end{aligned}$$

Să fixăm acum numărul $t \leq 0$ și să renunțăm la ipoteza temporară. Următoarea schimbare de variabile

$$\begin{cases} u(q) = U(s), \\ v(q) = V(s), \\ s(q) = -q, \end{cases} \quad q \leq 0, \quad (1.8)$$

ne conduce la relațiile

$$\begin{cases} \frac{du}{dq}(q) = -\frac{dU}{ds}(s(q)), \\ \frac{dv}{dq}(q) = -\frac{dV}{ds}(s(q)). \end{cases}$$

Sistemul diferențial (1.1) se rescrie astfel:

$$\begin{cases} \frac{dU}{ds}(s) = (-a) \cdot U(s) + (-b) \cdot V(s), \\ \frac{dV}{ds}(s) = (-c) \cdot U(s) + (-d) \cdot V(s). \end{cases} \quad s \geq 0. \quad (1.9)$$

Aplicând concluzia primei părți a demonstrației, avem

$$\begin{aligned} |u(t)| + |v(t)| &= |U(s(t))| + |V(s(t))| \\ &= |U(s)| + |V(s)| \\ &\leq [|U(0)| + |V(0)|] \cdot e^{s \cdot (|-a| + |-b| + |-c| + |-d|)} \\ &= [|u(0)| + |v(0)|] \cdot e^{|t| \cdot (|a| + |b| + |c| + |d|)}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Teorema 1.3. Fie $t_0 \in \mathbb{R}$ și $(u_0, v_0)^T \in \mathbb{R}^2$ oarecare. Atunci, sistemul diferențial (1.1) admite cel mult o soluție $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ cu proprietatea că

$$\begin{pmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Demonstrație. Schimbarea de variabile

$$\begin{cases} u(t) = U(s), \\ v(t) = V(s), \\ s(t) = t - t_0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

ne conduce la *problema Cauchy* [11, pag. 83]

$$\begin{cases} \frac{dU}{ds}(s) = a \cdot U(s) + b \cdot V(s), \\ \frac{dV}{ds}(s) = c \cdot U(s) + d \cdot V(s), \\ U(0) = u_0, \\ V(0) = v_0, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Să presupunem că problema (1.10) ar admite două soluții $\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix}$, unde $i \in \{1, 2\}$.

Atunci, diferența celor două soluții, notată cu $W := \begin{pmatrix} U_2 - U_1 \\ V_2 - V_1 \end{pmatrix}$ [11, pag. 159], ar verifica problema

$$\begin{cases} \frac{dW_1}{ds}(s) = a \cdot W_1(s) + b \cdot W_2(s), \\ \frac{dW_2}{ds}(s) = c \cdot W_1(s) + d \cdot W_2(s), \\ W_1(0) = 0, \\ W_2(0) = 0, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R},$$

unde $W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$.

Conform Teoremei 1.2, soluția W ar trebui să fie *identic nulă*: $W(s) = O_{21}$ pentru orice număr real s .

Justificarea s-a încheiat. \square

Capitolul 2

Orbite în planul fazelor pentru ecuația diferențială, liniară și omogenă, de ordinul al doilea

2.1 Grupul de transformări uniparametric al sistemului (1.1)

Îi atașăm matricei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, a coeficienților sistemului diferențial (1.1), mărimile

$$\mathbf{trace} := a + d,$$

$$\mathbf{det} := ad - bc,$$

$$\mathbf{discr} := \mathbf{trace}^2 - 4 \cdot \mathbf{det} = (a - d)^2 + 4bc.$$

Ele desemnează *urma*, *determinantul* și *discriminantul* matricei. Vezi pagina 11.

Valorile proprii ale matricei, $\lambda_{1,2}$, nu neapărat distincte, sunt date de formulele

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{trace} \pm \sqrt{\mathbf{discr}} \right), \quad \mathbf{discr} \geq 0,$$

respectiv

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{trace} \pm i\sqrt{-\mathbf{discr}} \right), \quad \mathbf{discr} < 0.$$

Astfel,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathbf{trace}, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \mathbf{det}, \quad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \mathbf{discr}.$$

2.1.1 Formulele soluției generale a sistemului (1.1)

Dacă *valorile proprii sunt reale și distincte*, atunci soluția generală are expresia

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= C_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \bar{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \cdot \bar{u}_2, \quad t \in \mathbb{R}, \\ &= ((e^{\lambda_1 t} \cdot \bar{u}_1) \quad (e^{\lambda_2 t} \cdot \bar{u}_2)) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

unde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$ reprezintă constantele de integrare și $\bar{u}_{1,2} \in \mathbb{R}^2$ vectori proprii liniar independenți peste corpul \mathbb{R} ai matricei A . (Vezi Lema 1.6, punctul 2).

Dacă *valorile proprii sunt egale*, $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$, iar *matricea A nu are defect*, atunci soluția generală are expresia

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= C_1 e^{\lambda t} \cdot \bar{u}_1 + C_2 e^{\lambda t} \cdot \bar{u}_2, \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}, \\ &= e^{\lambda t} \cdot (\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

unde $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vezi Exercițiul 1.1.

Dacă *valorile proprii sunt egale*, cu valoarea comună λ , iar *matricea A are defect*, atunci soluția generală are expresia

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \cdot \bar{u}_1 + C_2 e^{\lambda t} \cdot \bar{u}_2, \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}, \\ &= e^{\lambda t} \cdot (\bar{u}_1 \quad (t \cdot \bar{u}_1 + \bar{u}_2)) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

unde $\bar{u}_{1,2} \in \mathbb{R}^2$ sunt vectori liniar independenți peste corpul \mathbb{R} . Vezi Lema 1.12. Aici, doar \bar{u}_1 îi este vector propriu matricei A !

Dacă *valorile proprii sunt numere complexe nereale*,

$$\begin{aligned} \lambda &:= \lambda_1 = \alpha + i\beta, \\ \bar{\lambda} &= \lambda_2 = \alpha - i\beta, \end{aligned}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, atunci soluția generală are expresia

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} (C_1 U_1 - C_2 U_2) & (-C_1 U_2 - C_2 U_1) \\ (C_1 V_1 - C_2 V_2) & (-C_1 V_2 - C_2 V_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t - C_2 \sin \beta t) \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + (-C_2 \cos \beta t - C_1 \sin \beta t) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \\ &= -e^{\alpha t} \cdot (\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2) \begin{pmatrix} -\cos \beta t & \sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Vezi Lema 1.9.

Aici, vectorii

$$\bar{u}_1 := \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 := \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.5)$$

sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{R} , deci matricea

$$(\bar{u}_1 \ \bar{u}_2) \equiv \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix}$$

este inversabilă.

Extinzând vectorii la elemente din \mathbb{R}^3 , adică

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U \\ V \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U, V \in \mathbb{R},$$

observăm că:

1) determinantul matricei $(\bar{u}_1 \ \bar{u}_2)$ coincide cu *produsul mixt* a trei vectori:

$$\begin{aligned} \det(\bar{u}_1, \bar{u}_2) &:= \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} = U_1 V_2 - V_1 U_2 = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{k}) \\ &= (\bar{u}_1 \times \bar{u}_2) \cdot \bar{k} \neq 0, \quad \bar{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

2) modulul determinantului acestuia coincide cu modulul *produsului vectorial* al celor doi vectori,

$$|\det(\bar{u}_1, \bar{u}_2)| = |\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|.$$

Vezi [23, pp. 230, 232]. În multe situații, reorganizarea unor expresii matriceale pe baza calculului vectorial ușurează dezvoltările formulelor.

Exercițiul 2.1. (*Inversa matricei* $(\bar{u}_1 \ \bar{u}_2)$) Fie vectorii

$$\bar{U}_1 := \frac{(\bar{u}_2 \times \bar{u}_1) \times \bar{u}_2}{|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|^2}, \quad \bar{U}_2 := \frac{(\bar{u}_1 \times \bar{u}_2) \times \bar{u}_1}{|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|^2}$$

și $\vec{i} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{j} = (0, 1, 0)^T$. Atunci, sunt valabile egalitățile:

1)

$$\bar{U}_1 = \frac{V_2 \cdot \vec{i} - U_2 \cdot \vec{j}}{(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{k})} \equiv \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} \begin{pmatrix} V_2 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

și

$$\bar{U}_2 = \frac{-V_1 \cdot \vec{i} + U_1 \cdot \vec{j}}{(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{k})} \equiv \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} \begin{pmatrix} -V_1 \\ U_1 \end{pmatrix};$$

2)

$$\begin{cases} \bar{U}_1 \cdot \bar{u}_1 = 1, \\ \bar{U}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{U}_2 \cdot \bar{u}_1 = 0, \\ \bar{U}_2 \cdot \bar{u}_2 = 1; \end{cases}$$

3)

$$\begin{aligned} (\bar{u}_1 \ \bar{u}_2)^{-1} &= \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} \begin{pmatrix} V_2 & -U_2 \\ -V_1 & U_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} (V_2 \ -U_2) \\ \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} (-V_1 \ U_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\bar{U}_1)^T \\ (\bar{U}_2)^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluția exercițiului 2.1. 3) Astfel, inversa unei matrice 2×2 are drept linii vectorii bazei reciproce [13, pag. 28] a acelei baze a planului euclidian care se formează din coloanele matricei originale.

Soluția s-a încheiat. \square

Exercițiul 2.2. (Matricea A cu elemente spectrale impuse)

1) În cazul formulei (2.1),

$$A = \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} \begin{pmatrix} (\lambda_1 U_1 V_2 - \lambda_2 V_1 U_2) & -(\lambda_1 - \lambda_2) U_1 U_2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) V_1 V_2 & (\lambda_2 U_1 V_2 - \lambda_1 V_1 U_2) \end{pmatrix}.$$

2) În cazul formulei (2.3),

$$A = \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} \begin{pmatrix} (\lambda (U_1 V_2 - V_1 U_2) - U_1 V_1) & U_1^2 \\ -V_1^2 & (\lambda (U_1 V_2 - V_1 U_2) + U_1 V_1) \end{pmatrix}.$$

3) În cazul formulei (2.4),

$$A = \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha (U_1 V_2 - V_1 U_2) \\ -\beta (U_1 V_1 + U_2 V_2) \end{pmatrix} & \beta (U_1^2 + U_2^2) \\ -\beta (V_1^2 + V_2^2) & \begin{pmatrix} \alpha (U_1 V_2 - V_1 U_2) \\ +\beta (U_1 V_1 + U_2 V_2) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Soluția exercițiului 2.2. 1) Întrebuițăm relația

$$A \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 U_1 & \lambda_2 U_2 \\ \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 \end{pmatrix}.$$

2) Plecând de la egalitatea $(A - \lambda I_2) \bar{u}_2 = \bar{u}_1$, deducem că

$$A \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda U_1 & \lambda U_2 + U_1 \\ \lambda V_1 & \lambda V_2 + V_1 \end{pmatrix}.$$

3) Utilizăm relația

$$A \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha U_1 - \beta U_2) & (\alpha U_2 + \beta U_1) \\ (\alpha V_1 - \beta V_2) & (\alpha V_2 + \beta V_1) \end{pmatrix}.$$

Soluția s-a încheiat. \square

2.1.2 Grupul de izomorfisme atașat sistemului (1.1)

Fie $t \in \mathbb{R}$, fixat arbitrar. Introducem funcția $g^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cu formula

$$g^t(x, y) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

unde $(u, v)^T$ reprezintă *singura soluție*¹ a sistemului diferențial (1.1) pentru care

$$\begin{cases} u(0) = x, \\ v(0) = y. \end{cases}$$

Întrebuițăm expresiile (2.5) ale vectorilor $\bar{u}_{1,2}$ care fac parte din formulele soluției generale.

Astfel, în cazul formulelor (2.1) și (2.3), avem următoarele valori pentru constantele de integrare:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} \begin{pmatrix} V_2 & -U_2 \\ -V_1 & U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

În particular, în cazul formulei (2.2),

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = I_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

În cazul formulei (2.4), obținem

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{U_1 V_2 - V_1 U_2} \begin{pmatrix} V_2 & -U_2 \\ V_1 & -U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Drept consecință, formula funcției g^t poate fi rescrisă ca

$$g^t(x, y) = G(t) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad t, x, y \in \mathbb{R},$$

unde funcția matriceală $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are o *proprietate remarcabilă*: Lema 2.2.

Lema 2.1. 1) *În cazul* formulei (2.1),

¹ Vezi *chestiunea unicității*, adică Lema 1.5.

$$G(t) = \frac{1}{U_1V_2 - V_1U_2} \begin{pmatrix} (e^{\lambda_1 t}U_1V_2 - e^{\lambda_2 t}V_1U_2) & -U_1U_2(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \\ V_1V_2(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & (e^{\lambda_2 t}U_1V_2 - e^{\lambda_1 t}V_1U_2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

și $\det(G(t)) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$.

2) În cazul formulei (2.3),

$$G(t) = \frac{e^{\lambda t}}{U_1V_2 - V_1U_2} \begin{pmatrix} (U_1V_2 - V_1U_2 - tU_1V_1) & tU_1^2 \\ -tV_1^2 & (U_1V_2 - V_1U_2 + tU_1V_1) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

și $\det(G(t)) = e^{2\lambda t}$.

3) În cazul formulei (2.4),

$$G(t) = \frac{e^{\alpha t}}{U_1V_2 - V_1U_2} \times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -(U_1V_1 + U_2V_2) \sin \beta t \\ + (U_1V_2 - V_1U_2) \cos \beta t \end{pmatrix} & (U_1^2 + U_2^2) \sin \beta t \\ - (V_1^2 + V_2^2) \sin \beta t & \begin{pmatrix} (U_1V_1 + U_2V_2) \sin \beta t \\ + (U_1V_2 - V_1U_2) \cos \beta t \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

și $\det(G(t)) = e^{2\alpha t}$.

Demonstrație. Relațiile se probează prin calcul direct.

Justificarea s-a încheiat. \square

Observăm că

$$\det(G(t)) = e^{\text{trace} \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

identitate cunoscută drept *formula lui (J.) Liouville* [9, pag. 56].

Lema 2.2. (Proprietatea grupală a lui G [2, pp. 15, 129]) Pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$,

$$G(t+s) = G(t) \cdot G(s).$$

În particular, $G(0) = I_2$ și

$$[G(t)]^{-1} = G(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Păstrăm contextul părților 1) – 3) de la Lema 2.1 însă ne limităm doar la calculul² elementelor $(G(t) \cdot G(s))_{11}$.

1) Au loc relațiile

$$\left(e^{\lambda_1 t}U_1V_2 - e^{\lambda_2 t}V_1U_2 \right) \left(e^{\lambda_1 s}U_1V_2 - e^{\lambda_2 s}V_1U_2 \right)$$

² Demonstrarea rapidă a acestei proprietăți se bazează pe chestiunea unicității și pe următoarea caracteristică a soluțiilor unei ecuații diferențiale ordinare, liniară și omogenă, cu coeficienți constanți: dacă $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, îi este soluție ecuației, atunci și funcția $t \mapsto x(t + \text{constantă})$ îi va fi soluție.

$$\begin{aligned}
& -U_1U_2V_1V_2 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right) \left(e^{\lambda_1 s} - e^{\lambda_2 s} \right) \\
& = e^{\lambda_1(t+s)}U_1^2V_2^2 + e^{\lambda_2(t+s)}V_1^2U_2^2 - U_1U_2V_1V_2 \left[e^{\lambda_1(t+s)} + e^{\lambda_2(t+s)} \right] \\
& = \left[e^{\lambda_1(t+s)}U_1V_2 - e^{\lambda_2(t+s)}V_1U_2 \right] (U_1V_2 - U_2V_1).
\end{aligned}$$

2) Sunt valabile egalitățile

$$\begin{aligned}
& (U_1V_2 - V_1U_2 - tU_1V_1)(U_1V_2 - V_1U_2 - sU_1V_1) - tsU_1^2V_1^2 \\
& = (U_1V_2 - V_1U_2)^2 - (t+s)(U_1V_2 - V_1U_2)U_1V_1 \\
& = [U_1V_2 - V_1U_2 - (t+s)U_1V_1](U_1V_2 - V_1U_2).
\end{aligned}$$

3) În sfârșit,

$$\begin{aligned}
& [-(U_1V_1 + U_2V_2) \sin \beta t + (U_1V_2 - V_1U_2) \cos \beta t] \\
& \times [-(U_1V_1 + U_2V_2) \sin \beta s + (U_1V_2 - V_1U_2) \cos \beta s] \\
& - (U_1^2 + U_2^2)(V_1^2 + V_2^2) \sin \beta t \sin \beta s \\
& = \sin \beta t \sin \beta s \cdot \left[(U_1V_1 + U_2V_2)^2 - (U_1^2 + U_2^2)(V_1^2 + V_2^2) \right] \\
& - (U_1V_1 + U_2V_2)(U_1V_2 - V_1U_2) \sin \beta(t+s) \\
& + (U_1V_2 - V_1U_2)^2 \cos \beta t \cos \beta s \\
& = [-(U_1V_1 + U_2V_2) \sin \beta(t+s) + (U_1V_2 - V_1U_2) \cos \beta(t+s)](U_1V_2 - V_1U_2).
\end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Am construit, așadar, o mulțime formată din *izomorfisme* — aplicații liniare și bijective — ale planului euclidian \mathbb{R}^2 : $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Aceasta are structură de *grup* în raport cu *compunerea funcțiilor*:

$$g^{t+s} = g^t \circ g^s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Timpul t [2, pag. 14], utilizat la indicirea elementelor g^t , constituie *parametrul* grupului. Aplicațiile g^t sunt numite și *transformări punctuale* [23, pag. 502] ale lui \mathbb{R}^2 .

Lema 2.3. (Ecuția diferențială a *matricelor fundamentale* de soluții [11, pag. 172], [9, pag. 54]) Pentru orice $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} [G(t)] = A \cdot G(t).$$

Demonstrație. Egalitatea se rescrie ca $G'(t) \cdot [G(t)]^{-1} = A$. Pentru matricea A folosim expresiile de la Exercițiul 2.2. Apoi, noua relație se probează prin calcul direct.

De asemeni, sunt valabile identitățile

$$\frac{\partial}{\partial t} [g^t(x, y)] = A \cdot g^t(x, y)$$

$$= [G'(t) - AG(t)] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O_{21}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Introducând în egalitatea (2.7) valorile $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, stabilim că fiecare din coloanele matricei $G'(t) - AG(t)$ conține doar elemente nule.

Justificarea s-a încheiat. \square

În concluzie, nu pot scăpa neobservate *similitudinile* dintre proprietățile acestei aplicații G și cele ale *funcției exponențiale*: $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, în literatură se folosește notația sugestivă

$$e^{tA} := G(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aplicația matriceală G devine, astfel, *funcția exponențială* a matricei A . Informal, *exponențiala* matricei.

2.1.3 Orbitele sistemului (1.1)

Fie *punctul*³ $M = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, fixat arbitrar. Mulțimea

$$\mathcal{O}(M) = \mathcal{O}(x, y) := \{g^t(x, y) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

reprezintă o *orbită* [2, pag. 24] a sistemului diferențial (1.1). Evident, nicio orbită nu este vidă:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g^0(x, y) \in \mathcal{O}(x, y).$$

Originea $O = (0, 0)^T$, a reperului cartezian $Oxyt$, desemnează un punct *staționar* sau *fix*, un *echilibru* [2, pag. 16] ori, prin extensie de limbaj, un punct *singular* [11, pag. 247] al sistemului diferențial, adică un punct aflat pe o orbită constând dintr-un singur punct: $\mathcal{O}(0, 0) = \{(0, 0)^T\}$.

Lema 2.4. (Disjuncția orbitelor [2, ibid.]) *Dacă $\mathcal{O}(x_1, y_1) \cap \mathcal{O}(x_2, y_2) \neq \emptyset$ pentru punctele $(x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2$, unde $i \in \{1, 2\}$, atunci există $s \in \mathbb{R}$ astfel ca*

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = g^s(x_1, y_1).$$

De unde, $\mathcal{O}(x_1, y_1) = \mathcal{O}(x_2, y_2)$.

³ În materialul de față, geometria se păstrează *în fundal*: lucrăm, fără să precizăm de fiecare dată, în raport cu reperul cartezian $Oxyt$, ale cărui axe de coordonate au vectorii directori \vec{i}, \vec{j} , respectiv \vec{k} . În funcție de context, perechea de numere reale $(x, y)^T$ poate desemna atât un punct M al planului Oxy cât și un *vector liber* (geometric) din planul liniar $T\mathbb{R}^2$, $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ [13] [2, pag. 284].

Demonstrație. Fie $t_{1,2} \in \mathbb{R}$ cu $g^{t_1}(x_1, y_1) = g^{t_2}(x_2, y_2)$. Conform Lemei 2.2, avem

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (g^{t_2})^{-1}(g^{t_1}(x_1, y_1)) = g^{t_1 - t_2}(x_1, y_1).$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 2.5. (Autointersecțiile unei orbite) Fie $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. Dacă aplicația $(t \in \mathbb{R}) \mapsto g^t(x, y)$ nu este injectivă, atunci orbita $\mathcal{O}(x, y)$ este compactă (închisă și mărginită) în topologia euclidiană a planului fazelor.

Demonstrație. Fixăm $t_{1,2} \in \mathbb{R}$, $t_1 \neq t_2$, cu $g^{t_1}(x, y) = g^{t_2}(x, y)$. Conform Lemei 2.2, avem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g^T(x, y),$$

unde $T = \max\{t_1, t_2\} - \min\{t_1, t_2\} > 0$. Atunci,

$$\mathcal{O}(x, y) = \{g^t(x, y) \mid t \in [0, T]\}.$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 2.6. (Echilibre netriviabile) Dacă punctul $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ are orbita formată dintr-un singur punct, atunci $\det = 0$.

Demonstrație. Utilizăm egalitatea multiplă:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= (g^t)'(x, y) = \frac{\partial}{\partial t} [g^t(x, y)] \\ &= A \cdot g^t(x, y) = [A \cdot G(t)] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq O_{21}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Așadar, planul euclidian este *partiționat* de orbitele sistemului diferențial:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2} \mathcal{O}(x, y).$$

A face *portretul fazelor* unui sistem diferențial presupune a ilustra, în jurul punctelor remarcabile, orbitele acestuia: sunt înfățișate *formele*⁴ caracteristice, acelea datorită cărora portretul va fi recunoscut cu ușurință.

În Figura 2.1 sunt reprezentate: un *fragment* din graficul soluției

⁴ În literatură se vorbește și despre *aspectul* [2, pag. 39] curbilor ori despre *alura* lor ș.a.m.d.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = g^t(1,0), \quad t \in \mathbb{R},$$

a ecuației (liniarizate a) *pendulului matematic* [2, pag. 60], $x'' + x = 0$, și cercul format de proiecția ortogonală a acestui fragment pe planul Oxy , numit *planul fazelor* sistemului diferențial

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -u, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

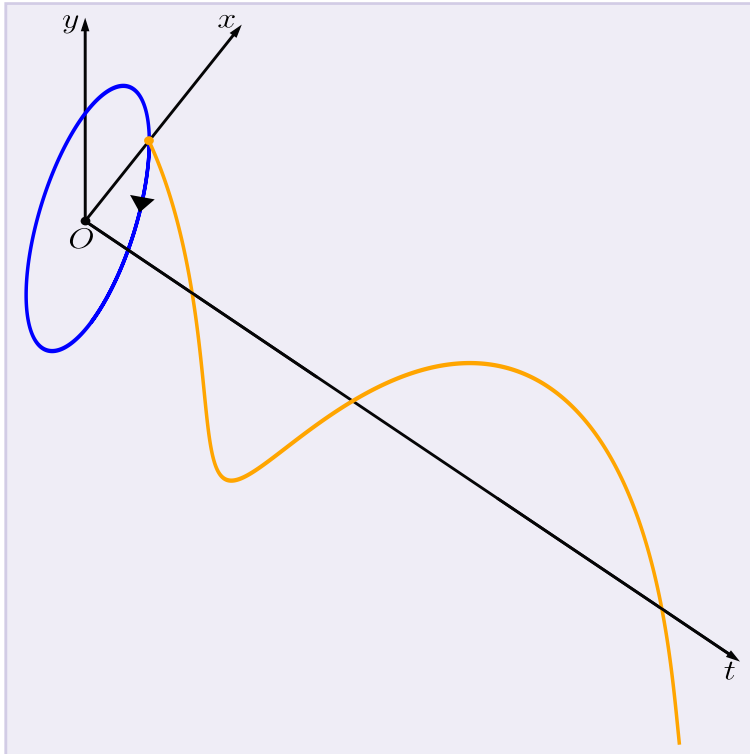


Fig. 2.1 Graficul (în portocaliu) și proiecția (în albastru a) acestuia pe planul fazelor pentru soluția $(x, x')^T$, a sistemului 2×2 echivalent ecuației diferențiale $x'' + x = 0$, cu data impusă $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Soluția a fost calculată pentru $t \in [0, 7.8]$ ca să se evidențieze *periodicitatea*.

Deoarece fragmentul de grafic a fost construit pentru un interval de timp cu lungimea mai mare decât *perioada principală* a soluției, proiecția pe planul fazelor constituie *întreaga orbită* generată de *data impusă* $(1, 0)^T$:

$$\mathcal{O}(1,0) = \mathbb{S}^1,$$

adică *cercul-unitate*. Atunci când nu este pericol de confuzie, vezi Figura 2.2, ne vom referi la fragmentele desenate cu apelativul *orbite*; chiar dacă, în realitate, acestea sunt *nemărginite*, deci nu pot fi ilustrate pe foaia de hârtie fără *reprezentări* complicate [2, pag. 22].

Triunghiurile negre din imagini semnifică *săgeți* indicatoare ale *sensului de parcurs* [2, pag. 40], adică ale *ordinii* în care sunt desenate punctele proiecției pe măsură ce *trece* timpul t , dinspre *trecutul* $-\infty$ către *viitorul* $+\infty$ [2, pp. 11, 14, 20].

2.2 Ecuția oscilatorului liniar amortizat

Fie numerele $c, k \in \mathbb{R}$, fixate arbitrar, pe care le vom numi *coeficienții de amortizare* și respectiv *de elasticitate* ai ecuației diferențiale ordinare

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Pe scurt, *amortizarea*⁵ c și *elasticitatea* k .

Vom întrebuința, fără mențiuni speciale, două notații ale *derivatei* unei funcții. Astfel, *derivatele cu puncte* — $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{r}, \ddot{r}$ ș.a.m.d. — se referă la derivarea în raport cu *timpul* t . Notația *cu prim*, adică u', v'' și restul, desemnează derivări în raport cu alte variabile: de exemplu, derivata în raport cu *coordonata curbilinie* s .

Ecuția (2.8) se rescrie ca sistem diferențial, liniar și omogen, drept

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -k \cdot x - c \cdot y, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

de unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix}$, respectiv

$$\mathbf{trace} = -c, \quad \mathbf{det} = k, \quad \mathbf{discr} = c^2 - 4k.$$

În consecință, *ecuația caracteristică* atașată ecuației (2.8) capătă expresia

$$\lambda^2 + c \cdot \lambda + k = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.10)$$

și, observând că

$$\left(e^{\lambda t}\right)^{\bullet\bullet} + c \left(e^{\lambda t}\right)^{\bullet} + k e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \cdot (\lambda^2 + c\lambda + k),$$

deducem formula unei soluții *complexe* a ecuației diferențiale: $t \mapsto e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$. Soluția generală *reală* a ecuației (2.8) se construiește, urmând tehnica din primul capitol, pe baza acestei soluții [9, pag. 29].

⁵ În englezește, *damping*. În literatură se face uz și de termenul (coeficient de) *frezare*.

Exercițiul 2.3. Dacă matricea A a sistemului diferențial (2.9) este *cu defect*, atunci are loc egalitatea

$$(A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix},$$

unde

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluția exercițiului 2.3. Avem $\det = \frac{\text{trace}^2}{4}$, $\lambda = \frac{\text{trace}}{2}$.

Soluția s-a încheiat. \square

Exercițiul 2.4. Să se arate că:

1) schimbarea de variabile

$$\begin{cases} X = e^{ct} \cdot x, \\ Y = e^{ct} \cdot y \end{cases}$$

transformă sistemul (2.9) în

$$\begin{cases} \dot{X} = c \cdot X + Y, \\ \dot{Y} = -k \cdot X, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R};$$

2) este valabilă dubla identitate

$$\ddot{Y} - c\dot{Y} + kY = e^{ct} \cdot (\ddot{x} + c\dot{x} + kx)^{\bullet} = 0.$$

Soluția exercițiului 2.4. 1) Utilizăm reorganizarea ecuației (2.8) sub forma

$$(e^{ct} \dot{x})^{\bullet} + k \cdot e^{ct} x = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soluția s-a încheiat. \square

2.2.1 Cazul $\text{trace} < 0$, $\det > 0$, $\text{discr} > 0$

Reprezentările grafice care urmează sunt destinate, mai ales, unei *realizări de mână*, stilizate. Locul celei de-a doua derivate a unei funcții numerice, folosită, atunci când se construiește *graficul* [14, pag. 348] funcției în cauză, pentru stabilirea intervalelor de concavitate *versus* convexitate ale acesteia, este luat aici de analiza *curburii cu semn*⁶ a fragmentelor de orbită: încotro *cotește* orbita, *la stânga* sau *la dreapta*?

⁶ În englezește, *signed curvature*.

Calculule de până acum arată că *raza vectoare*⁷ $\vec{r}(t) = \overline{OM}$ a punctului curent $M = (x(t), \dot{x}(t))^T$ de pe orbită are formula

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} \\ &= \alpha(t) \cdot \vec{u}_1 + \beta(t) \cdot \vec{u}_2, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

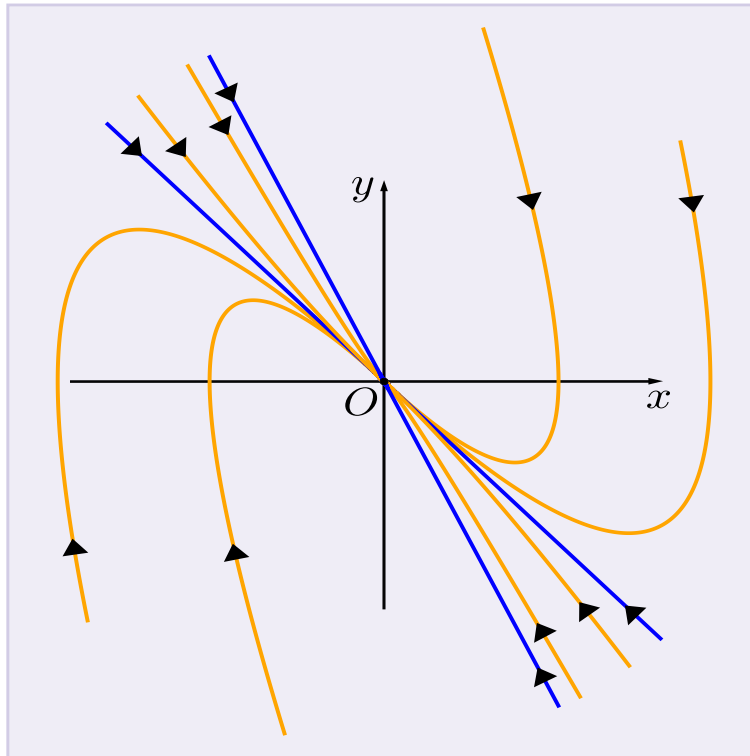


Fig. 2.2 Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + 3x' + 2x = 0$. Aici, **trace** < 0 , **det** > 0 , **discr** > 0 .

unde vectorii $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ alcătuiesc o *bază* — constantă! —, în general neortogonală, a planului liniar director $T\mathbb{R}^2$, peste corpul \mathbb{R} , al *foii de hârtie*. Cu ajutorul *reguli paralelogramului*, aplicată *segmentelor orientate* din desen, și a unor *estimări asimptotice* imediate vom stabili *alura orbitei* în vecinătatea *echilibrului trivial* al sistemului diferențial, O .

⁷ Vezi Secțiunea 2.3.

2.2.1.1 Varietăți în planul fazelor

Ne interesează existența unor submulțimi *simple*, adică *ușor de parametrizat*, ale planului fazelor în care să se producă următorul fenomen: *orbita unui punct oarecare din submulțime să fie inclusă în submulțime iar submulțimea să conțină, incluse, cel puțin două orbite*. Căruții ideali sunt *dreptele și conicele*.

Astfel, ne întrebăm dacă există vreun număr $m \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\mathcal{O}(M) \subseteq \Delta_m, \quad \forall M \in \Delta_m,$$

unde $\Delta_m := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = m \cdot x\}$.

Sistemul (2.9) ne conduce la

$$\begin{cases} \dot{x} = y & = mx, \\ \dot{y} = -kx - cy & = -(k + cm)x, \end{cases}$$

respectiv la

$$\begin{cases} \dot{x} & = mx, \\ m \dot{x} & = -(k + cm)x, \end{cases}$$

de unde

$$(m^2 + cm + k) \cdot x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Concluzem că $m \in \{\lambda_{1,2}\}$. Vezi (2.10).

Introducem soluțiile *relevante*, speculând formula (2.1):

$$\begin{pmatrix} x_{1C_1} \\ y_{1C_1} \end{pmatrix} := C_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{2C_2} \\ y_{2C_2} \end{pmatrix} := C_2 e^{\lambda_2 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$. Evident,

$$\begin{pmatrix} x_{iC_i}(t) \\ y_{iC_i}(t) \end{pmatrix} \in \Delta_{\lambda_i} \cap \mathcal{O}(C_i, \lambda_i C_i), \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Deoarece *valorile proprii* $\lambda_2 < \lambda_1$ *sunt negative*, deducem că soluțiile

$$\left(\begin{pmatrix} x_{1C_+} \\ y_{1C_+} \end{pmatrix} \right)_{C_+ > 0}$$

produc, cu toatele, *o singură orbită*:

$$\mathcal{O}_+ := \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \mid \mu \in (0, +\infty) \right\}.$$

Într-adevăr, plecând de la egalitatea

$$C_1 e^{\lambda_1 T} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ \lambda_1 C_2 \end{pmatrix}, \quad T := \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{C_2}{C_1} \right),$$

unde $C_{1,2} > 0$, stabilim că

$$\mathcal{O}(C_1, \lambda_1 C_1) \cap \mathcal{O}(C_2, \lambda_1 C_2) \neq \emptyset.$$

Vezi Lema 2.4.

Orbita \mathcal{O}_+ constituie *semidreapta pozitivă* a dreptei Δ_{λ_1} . La rândul lor, soluțiile

$$\left(\begin{pmatrix} x_{1C_-} \\ y_{1C_-} \end{pmatrix} \right)_{C_- < 0}$$

determină orbita:

$$\mathcal{O}_- := \left\{ \zeta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \mid \zeta \in (-\infty, 0) \right\},$$

adică *semidreapta negativă* a dreptei Δ_{λ_1} .

Așadar, avem următoarea *partiționare* a dreptei Δ_{λ_1} :

$$\Delta_{\lambda_1} = \mathcal{O}_- \cup \{O\} \cup \mathcal{O}_+;$$

aceasta include *trei orbite* ale ecuației diferențiale.

Submulțimea Δ_{λ_1} , a planului fazelor, se numește *varietate diferențială* ori *diferențiabilă reală* a acestuia. Pe scurt, *varietate* a planului. Ea are *dimensiunea unu*. În Figura 2.2, varietățile $\Delta_{\lambda_{1,2}}$ sunt colorate în albastru.

Apelând încă o dată la *disjuncția orbitelor*, deducem că nicio (altă) orbită a sistemului diferențial nu poate intersecta vreuna din varietățile $\Delta_{\lambda_{1,2}}$ pentru că aceasta ar implica fie intersectarea uneia din semidrepte, fie trecerea prin originea O . În consecință, cele două drepte împart planul în *patru sectoare* disjuncte două câte două, cu vârful în O : patru *felii de pizza*!

Atunci când nu este pericol de confuzie și construim portretul fazelor cu ajutorul unui program de calculator, putem spune că, pe varietatea Δ_{λ_i} , se găsește o *infinitate de "orbite"* ale sistemului diferențial. Dat fiind că algoritmul numeric pornește din puncte diverse ale planului, aceste "orbite" sunt, în realitate, simple *fragmente de orbită* suprapuse în vecinătatea lui O .

2.2.1.2 Alura orbitelor dintr-un sector

Folosim conceptele de cinematică din Secțiunea 2.3. Astfel, fixăm constantele de integrare $C_{1,2} \in \mathbb{R}$ pentru care

$$C_1 \cdot C_2 \neq 0.$$

Evident, orbita $\mathcal{O}(x, y)$, vezi (2.14), este inclusă (*doar*) într-unul din sectoare.

Introducem vectorii $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in T_O\mathbb{R}^2$, unde

$$\vec{u}_i \in \bar{u}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Desenăm, în Figura 2.3, vectorul de poziție al punctului curent de pe orbită, $\vec{r} \in T_O\mathbb{R}^2$, unde $M = (x(t), y(t))^T$ și $\vec{r} = \overline{OM}$, respectiv un reprezentant $\vec{v} \in T_O\mathbb{R}^2$ al vectorului-viteză \bar{v} al lui M . Cele două segmente orientate \vec{v} fac parte din aceeași clasă de echivalență, $\bar{v}(t)$.

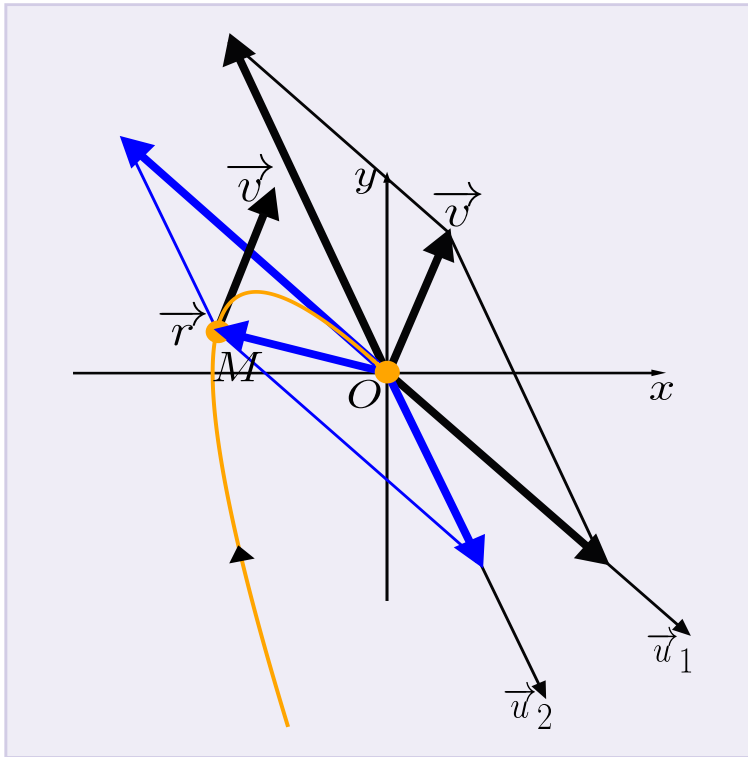


Fig. 2.3 Regula paralelogramului: descompunerea vectorilor \vec{r}, \vec{v} după direcțiile \bar{u}_1, \bar{u}_2 .

Sunt valabile egalitățile

$$\begin{aligned} \vec{r} &= C_1 e^{\lambda_1 t} \left[\bar{u}_1 + \frac{C_2}{C_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \cdot \bar{u}_2 \right] \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t} [\bar{u}_1 + o(1)], \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.11)$$

și

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} \left[\bar{u}_1 + \frac{\lambda_2 C_2}{\lambda_1 C_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \cdot \bar{u}_2 \right] \\ &= \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} [\bar{u}_1 + o(1)], \quad t \rightarrow +\infty,\end{aligned}\tag{2.12}$$

respectiv

$$\begin{aligned}\bar{r} &= C_2 e^{\lambda_2 t} \left[\bar{u}_2 + \frac{C_1}{C_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \cdot \bar{u}_1 \right] \\ &= C_2 e^{\lambda_2 t} [\bar{u}_2 + o(1)], \quad t \rightarrow -\infty,\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \left[\bar{u}_2 + \frac{\lambda_1 C_1}{\lambda_2 C_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \cdot \bar{u}_1 \right] \\ &= \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} [\bar{u}_2 + o(1)], \quad t \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

Primele două *dezvoltări asimptotice* anterioare, (2.11) și (2.12), ne arată că, atunci când ne *îndepărtăm în viitor*, adică pentru $t \rightarrow +\infty$, laturile paralele cu \bar{u}_2 ale celor două paralelograme din figură devin *infiniț de mici* în comparație cu laturile corespunzătoare care sunt paralele cu \bar{u}_1 . În consecință, *orbita devine paralelă la $+\infty$ cu varietatea Δ_{λ_1}* . Un comportament similar se produce atunci când ne *îndepărtăm în trecut*, adică pentru $t \rightarrow -\infty$: *orbita devine paralelă la $-\infty$ cu varietatea Δ_{λ_2}* .

În plus, cum $\lim_{t \rightarrow +\infty} r = 0$, deducem că, *la îndepărtarea în viitor, particula M va tinde către originea O* .

Pentru a concluda că desenele fragmentelor de orbită din Figura 2.2, realizate cu ajutorul unor programe de calculator, sunt în concordanță cu predicțiile teoretice, a rămas de răspuns la o singură întrebare: *de unde rezultă că orbitele nu șerpuiesc, adică nu au curburi cu semn variabil?* Astfel, ne interesează valorile *curburii cu semn* (2.29).

Au loc următoarele egalități:

$$\begin{aligned}x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = \dot{x} &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \dot{y} = \ddot{x} &= C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}, \\ \ddot{y} = \dddot{x} &= C_1 \lambda_1^3 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2^3 e^{\lambda_2 t},\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\tag{2.13}$$

și

$$\begin{aligned}
\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} &= \left(C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} \right)^2 \\
&\quad - \left(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \right) \left(C_1\lambda_1^3 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2^3 e^{\lambda_2 t} \right) \\
&= -C_1C_2\lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \\
&= -C_1C_2 \cdot \mathbf{det} \cdot e^{\mathbf{trace} \cdot t} \cdot \mathbf{discr},
\end{aligned}$$

unde $t \in \mathbb{R}$.

Formula (2.13) a vectorului-viteză al punctului curent ne conduce la (2.26), adică *particula M are întotdeauna viteză pe traiectoria sa.*

În Figura 2.2, numerotăm în sens trigonometric cele patru sectoare, pornind din cadranul al IV-lea al sistemului de referință Oxy :

$$\begin{aligned}
M \in \mathbf{sectorul\ I} &\text{ dacă } \lambda_2 x < y < \lambda_1 x, \\
M \in \mathbf{sectorul\ II} &\text{ dacă } \max\{\lambda_1 x, \lambda_2 x\} < y, \\
M \in \mathbf{sectorul\ III} &\text{ dacă } \lambda_1 x < y < \lambda_2 x, \\
M \in \mathbf{sectorul\ IV} &\text{ dacă } \min\{\lambda_1 x, \lambda_2 x\} > y.
\end{aligned}$$

Conform (2.6),

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 x - y \\ y - \lambda_1 x \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

de unde

$$\begin{aligned}
&\text{când } M \in \mathbf{sectorul\ I} \text{ curba cotește } \mathbf{la\ stânga}: k_{1s} > 0, \\
&\text{când } M \in \mathbf{sectorul\ II} \text{ curba cotește } \mathbf{la\ dreapta}: k_{1s} < 0, \\
&\text{când } M \in \mathbf{sectorul\ III} \text{ curba cotește } \mathbf{la\ stânga}: k_{1s} > 0, \\
&\text{când } M \in \mathbf{sectorul\ IV} \text{ curba cotește } \mathbf{la\ dreapta}: k_{1s} < 0.
\end{aligned}$$

În fine, cum avem

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{O}(x, y), \Delta_{\lambda_1}) &:= \inf_{M \in \mathcal{O}(x, y), N \in \Delta_{\lambda_1}} |\overline{MN}| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

se poate afirma că *varietatea Δ_{λ_1} îi este mulțime asimptotică (spațiu asimptotic) la $+\infty$ oricărei orbite care nu intersectează varietățile $\Delta_{\lambda_{1,2}}$. Cu excepția orbitei (degenerate a) originii O , toate celelalte orbite sunt nemărginite și (curbe) simple. Vezi Lema 2.5 și Secțiunea A.3.*

2.2.2 Cazul $\text{trace} < 0$, $\text{det} > 0$, $\text{discr} = 0$

Aici, valorile proprii sunt egale și negative: $\lambda_{1,2} = \lambda < 0$, iar matricea A are defect. Vezi Exercițiul 2.3.

Căutăm o varietate a planului fazelor sunt forma unei drepte de coeficient unghiular m și ajungem, la fel ca anterior, la egalitatea

$$\left(m^2 + cm + \frac{c^2}{4}\right) \cdot x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

de unde $m = \lambda$. Varietatea diferențială Δ_λ este colorată în albastru în Figura 2.4.

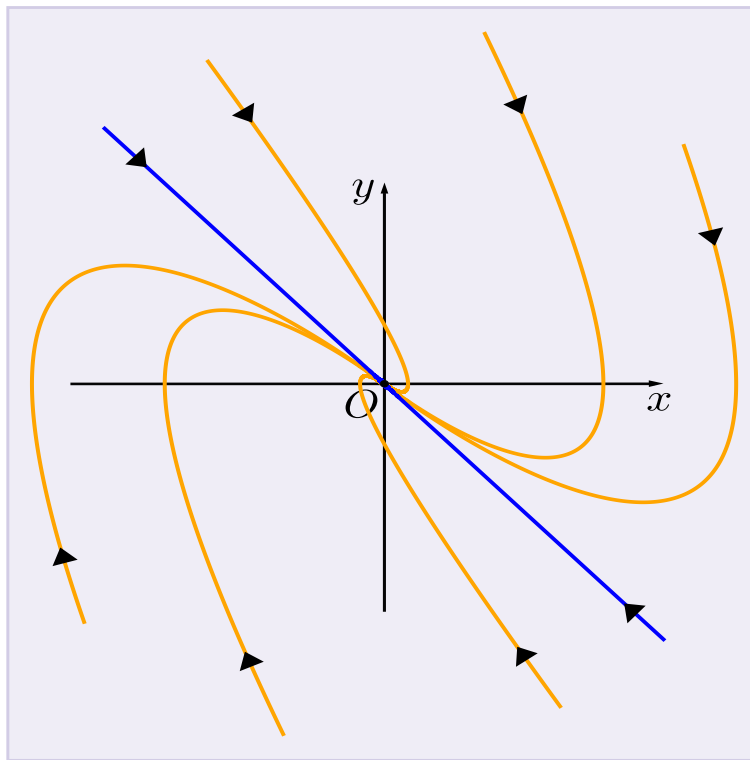


Fig. 2.4 Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + 2x' + x = 0$. Aici, $\text{trace} < 0$, $\text{det} > 0$, $\text{discr} = 0$.

Are loc *partiționarea* varietății ca reuniune a trei orbite:

$$\Delta_\lambda = \mathcal{O}_- \cup \{O\} \cup \mathcal{O}_+,$$

unde *semidreapta negativă* este

$$\mathcal{O}_- = \left\{ \zeta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \zeta \in (-\infty, 0) \right\}$$

iar *semidreapta pozitivă* este

$$\mathcal{O}_+ = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \mu \in (0, +\infty) \right\}.$$

Fixăm constantele de integrare $C_{1,2} \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$C_2 \neq 0.$$

Conform (2.6),

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - \lambda x \end{pmatrix}.$$

Sunt valabile egalitățile

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \cdot \bar{u}_1 + C_2 e^{\lambda t} \cdot \bar{u}_2 \\ &= C_2 e^{\lambda t} \left(t \cdot \bar{u}_1 + \frac{C_1}{C_2} \cdot \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \right) \\ &= C_2 e^{\lambda t} (t \cdot \bar{u}_1 + \bar{u}_3), \end{aligned} \tag{2.15}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \bar{v} &= C_2 \lambda t e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} + e^{\lambda t} \begin{pmatrix} C_2 + C_1 \lambda \\ \lambda (2C_2 + C_1 \lambda) \end{pmatrix} \\ &= C_2 \lambda e^{\lambda t} (t \cdot \bar{u}_1 + \bar{u}_4) \end{aligned}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_3(x, y) := \frac{C_1}{C_2} \cdot \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \tag{2.16}$$

și

$$\bar{u}_4(x, y) := \frac{1}{C_2 \lambda} \begin{pmatrix} C_2 + C_1 \lambda \\ \lambda (2C_2 + C_1 \lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{C_2 \lambda} [(C_2 + C_1 \lambda) \cdot \bar{u}_1 + C_2 \lambda \cdot \bar{u}_2].$$

Astfel, cum vectorii $t \cdot \bar{u}_1 + \bar{u}_{3,4}$ devin *paraleli*, atât atunci când $t \rightarrow +\infty$ cât și atunci când $t \rightarrow -\infty$, cu *vectorul-director* al varietății Δ_λ , \bar{u}_1 , deducem că *orice orbită care nu intersectează varietatea Δ_λ este paralelă cu aceasta atât în trecutul îndepărtat cât și în viitorul îndepărtat*.

În plus, cum $\lim_{t \rightarrow +\infty} r = 0$, rezultă că, *la îndepărtarea în viitor, particula M va tinde către originea O .*

Pentru a decide semnul curburii, avem

$$\begin{aligned}x &= (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}, \\y = \dot{x} &= (C_2 + C_1 \lambda + \lambda C_2 t) e^{\lambda t}, \\\dot{y} = \ddot{x} &= (2C_2 \lambda + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda^2 t) e^{\lambda t}, \\\ddot{y} = \dddot{x} &= (3C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda^3 + C_2 \lambda^3 t) e^{\lambda t},\end{aligned}$$

de unde

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 e^{\lambda t} \\ (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

și

$$\begin{aligned}\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} &= (\dot{y})^2 - y\ddot{y} \\&= (2C_2 \lambda + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda^2 t)^2 e^{2\lambda t} \\&\quad - (C_2 + C_1 \lambda + \lambda C_2 t) (3C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda^3 + C_2 \lambda^3 t) e^{2\lambda t} \\&= C_2^2 \lambda^2 e^{2\lambda t} \\&= C_2^2 \cdot \mathbf{det} \cdot e^{\mathbf{trace} \cdot t}\end{aligned}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

În concluzie, *pe fiecare orbită care nu intersectează varietatea Δ_λ , particulele au viteză, respectiv orbitele cotesc în permanență la dreapta iar varietatea Δ_λ le este mulțime asimptotică la $+\infty$. Cu excepția orbitei (degenerate a) originii O , toate celelalte orbite sunt nemărginite și (curbe) simple. Vezi Secțiunea A.2.*

2.2.3 Cazul $\mathbf{trace} < 0$, $\mathbf{det} > 0$, $\mathbf{discr} < 0$

Aici, valorile proprii sunt numere complexe nereale:

$$\begin{aligned}\lambda_1 = \lambda &= \alpha + i\beta, \\\lambda_2 = \bar{\lambda} &= \alpha - i\beta,\end{aligned}$$

unde

$$\alpha = -\frac{c}{2} = \frac{\mathbf{trace}}{2}, \quad \beta = -\frac{\sqrt{-\mathbf{discr}}}{2}.$$

Pentru

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix},$$

avem

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha^2 + \beta^2) & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Vezi Exercițiul 2.2, punctul 3).

Sunt valabile egalitățile⁸

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \bar{u}_1 + e^{\alpha t} (-C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) \bar{u}_2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

de unde deducem că *toate orbitele nedegenerate sunt nemărginite*⁹ și

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r = 0,$$

respectiv

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= C_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t \\ (\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t \end{pmatrix} \\ &+ C_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \beta \cos \beta t + \alpha \sin \beta t \\ (\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta t + 2\alpha\beta \cos \beta t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} &= C_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t \\ \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \cos \beta t - \beta(3\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta t \end{pmatrix} \\ &+ C_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta t + 2\alpha\beta \cos \beta t \\ \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \sin \beta t + \beta(3\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

unde $t \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 2.5. Să se arate că, pentru orice $t \in \mathbb{R}$:

1)

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= e^{2\alpha t} \left\{ \cos^2(\beta t) \cdot \left\{ [C_1(\alpha^2 - \beta^2) + 2C_2\alpha\beta]^2 + (\alpha C_1 + \beta C_2)^2 \right\} \right. \\ &+ \sin^2(\beta t) \cdot \left\{ [C_2(\alpha^2 - \beta^2) + 2C_1\alpha\beta]^2 + (\beta C_1 - \alpha C_2)^2 \right\} \\ &+ 2 \sin(\beta t) \cos(\beta t) \cdot \left\{ \alpha\beta [1 + 2(\alpha^2 - \beta^2)] (C_2^2 - C_1^2) \right. \\ &\left. \left. + 2(\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha^2\beta^2) C_1 C_2 \right\} \right\}; \end{aligned}$$

⁸ Atenție, din rațiuni mnemotehnice, am înlocuit constanta de integrare C_2 cu $-C_2$ în formula (2.4).

⁹ Vezi și identitatea (2.21).

2) determinantul matricei

$$V(t) := \begin{pmatrix} (\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t) & (\beta \cos \beta t + \alpha \sin \beta t) \\ ((\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t) & ((\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta t + 2\alpha\beta \cos \beta t) \end{pmatrix}$$

are valoarea $\beta (\alpha^2 + \beta^2)$;

3) se adeverește inegalitatea

$$\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = k^2x^2 + ky^2 + ckxy \geq 0;$$

4)

$$k^2x^2 + ky^2 + ckxy = (C_1^2 + C_2^2) \beta^2 (\alpha^2 + \beta^2) e^{-2\alpha t}.$$

Soluția exercițiului 2.5. 3) Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} &= (\dot{y})^2 - y(-kx - cy) \\ &= (-kx - cy)^2 - y(-k\dot{x} - c\dot{y}) \\ &= (kx + cy)^2 + y(ky - ckx - c^2y) \\ &= k^2x^2 + ky^2 + ckxy. \end{aligned}$$

Aplicăm *inegalitatea mediilor*:

$$\begin{aligned} k^2x^2 + ky^2 &\geq 2\sqrt{k^3x^2y^2} = (2\sqrt{k})k|xy| \\ &\geq ck|xy| \\ &\geq \pm ckxy. \end{aligned}$$

Restul formulelor se probează prin calcul direct.

Soluția s-a încheiat. \square

Deoarece

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} V(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

stabilim că *particula M* are viteză pe oricare din orbitele nedegenerate. Vezi Exercițiul 2.5, punctul 2).

Căutăm o *varietate* a planului fazelor de forma

$$\Delta_m = \{ (x, y)^T \mid y = m \cdot x \}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Aceasta ne conduce la identitatea:

$$[(\alpha - m)C_1 + \beta C_2] \cos(\beta t) + [-\beta C_1 + (\alpha - m)C_2] \sin(\beta t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

de unde, prin derivare în raport cu t , obținem că

$$\begin{pmatrix} ((\alpha - m)C_1 + \beta C_2) & (-\beta C_1 + (\alpha - m)C_2) \\ (\beta(-\beta C_1 + (\alpha - m)C_2)) & (-\beta((\alpha - m)C_1 + \beta C_2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

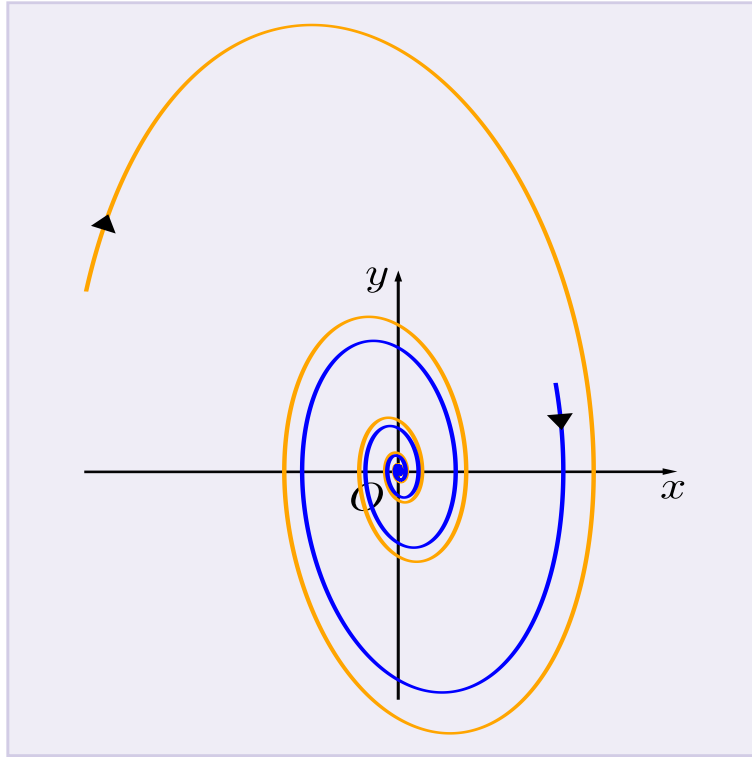


Fig. 2.5 Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + x' + 9x = 0$. Aici, $\text{trace} < 0$, $\text{det} > 0$, $\text{discr} < 0$.

Ultima identitate implică faptul că *matricea din componența sa are determinant nul*. De aici, ajungem la sistemul algebric

$$\begin{cases} (\alpha - m)C_1 + \beta C_2 = 0, \\ -\beta C_1 + (\alpha - m)C_2 = 0, \end{cases}$$

cu necunoscutele $C_{1,2} \in \mathbb{R}$. Determinantul matricei acestui sistem este estimat prin

$$(\alpha - m)^2 + \beta^2 \geq \beta^2 > 0. \quad (2.20)$$

În consecință, $\Delta_m = \{O\}$ pentru orice $m \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, *nu există nicio varietate diferențială de tip dreaptă a planului fazelor care să-l partajeze pe acesta în sectoare.*

Pentru analiza curburii cu semn, realizăm că

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{y} = e^{2\alpha t} & \left\{ \cos^2(\beta t) [C_1(\alpha^2 - \beta^2) + 2C_2\alpha\beta]^2 \right. \\ & + \sin^2(\beta t) [C_2(\alpha^2 - \beta^2) - 2C_1\alpha\beta]^2 \\ & + 2\sin(\beta t)\cos(\beta t) \{2(C_2^2 - C_1^2)\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) \\ & \left. + C_1C_2[(\alpha^2 - \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]\} \right\}, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{y} = e^{2\alpha t} & \left\{ \cos^2(\beta t)(C_1\alpha + C_2\beta) [C_1\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) + C_2\beta(3\alpha^2 - \beta^2)] \right. \\ & + \sin^2(\beta t)(-C_1\beta + C_2\alpha) [-C_1\beta(3\alpha^2 - \beta^2) + C_2\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)] \\ & + \sin(\beta t)\cos(\beta t) \{ (C_1\alpha + C_2\beta) [-C_1\beta(3\alpha^2 - \beta^2) + C_2\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)] \\ & \left. + (-C_1\beta + C_2\alpha) [C_1\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) + C_2\beta(3\alpha^2 - \beta^2)] \} \right\}, \end{aligned}$$

unde $t \in \mathbb{R}$.

Apoi,

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = \cos^2(\beta t) \cdot (\text{subsetul 1}) & + \sin^2(\beta t) \cdot (\text{subsetul 2}) \\ & + \sin(\beta t)\cos(\beta t) \cdot (\text{subsetul 3}), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} \text{subsetul 1} = \text{subsetul 2} & = (C_1^2 + C_2^2)\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)e^{2\alpha t}, \\ \text{subsetul 3} & = 0. \end{aligned}$$

Am ajuns la

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} & = (C_1^2 + C_2^2)\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)e^{2\alpha t} \\ & = (C_1^2 + C_2^2)\frac{4k - c^2}{4}ke^{-ct} \\ & = -\frac{C_1^2 + C_2^2}{4} \cdot \text{discr} \cdot \text{det} \cdot e^{\text{trace} \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Așadar, *toate orbitele nedegenerate cotesec în permanență la dreapta.*

Remarcăm identitatea următoare [11, pag. 253]:

$$\bar{r}\left(t + \frac{2k\pi}{-\beta}\right) = e^{2k\pi \cdot \frac{\alpha}{-\beta}} \cdot \bar{r}(t), \quad k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Exercițiul 2.6. Fie $E, F \in \mathbb{R}$, cu $E^2 + F^2 > 0$, fixate arbitrar. Dacă există $t_* \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\bar{r}(t_*) = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix},$$

atunci să se arate că

$$e^{\alpha t_*} \begin{pmatrix} \cos \beta t_* \\ \sin \beta t_* \end{pmatrix} = \frac{1}{C_1^2 + C_2^2} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1^T \\ \bar{U}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix},$$

unde $\{\bar{U}_1, \bar{U}_2\}$ este baza reciprocă a bazei $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ și $\bar{r}(0) = (C_1, C_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O_{21}\}$.

Soluția exercițiului 2.6. Baza reciprocă este introdusă în Exercițiul 2.1. Relația din enunțul de față se reorganizează drept

$$e^{\alpha t_*} (\bar{u}_1 \ \bar{u}_2) \begin{pmatrix} \cos \beta t_* & \sin \beta t_* \\ -\sin \beta t_* & \cos \beta t_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix},$$

respectiv

$$e^{\alpha t_*} \begin{pmatrix} \cos \beta t_* & \sin \beta t_* \\ -\sin \beta t_* & \cos \beta t_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U}_1^T \\ \bar{U}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

și

$$e^{\alpha t_*} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta t_* \\ \sin \beta t_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U}_1^T \\ \bar{U}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}.$$

Soluția s-a încheiat. \square

Exercițiul 2.7. Fie $E, F \in \mathbb{R}$, cu $E^2 + F^2 > 0$, fixate arbitrar. Dacă există $t_* \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$e^{\alpha t_*} \begin{pmatrix} \cos \beta t_* \\ \sin \beta t_* \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix},$$

unde $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci

$$e^{\alpha t^*} \begin{pmatrix} \cos \beta t^* \\ \sin \beta t^* \end{pmatrix} = H \cdot \left[-e^{\pi \frac{\alpha}{\beta}} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \right]$$

pentru $t^* = t_* + \frac{\pi}{\beta}$.

Soluția exercițiului 2.7. Avem

$$\begin{pmatrix} \cos \beta t^* \\ \sin \beta t^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos \beta t_* \\ \sin \beta t_* \end{pmatrix}.$$

Observăm că *punctele* $-e^{\frac{\pi\alpha}{\beta}} \cdot (E, F)^T, O, (E, F)^T$ *sunt coliniare.*

Soluția s-a încheiat. \square

Exercițiul 2.8. Fie matricea $H := \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nesingulară și numărul real m , ambele fixate arbitrar. Atunci, să se arate că există numerele $t_{m,\infty}, D_{m,\infty} \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$e^{\alpha t_m} \begin{pmatrix} \cos \beta t_m \\ \sin \beta t_m \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} D_m \\ m \cdot D_m \end{pmatrix}, \quad e^{\alpha t_\infty} \begin{pmatrix} \cos \beta t_\infty \\ \sin \beta t_\infty \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} 0 \\ D_\infty \end{pmatrix}.$$

Soluția exercițiului 2.8. Observăm că $H \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \neq O_{21}$ pentru orice

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

de unde

$$h := \sqrt{(h_1\gamma + h_2\delta)^2 + (h_3\gamma + h_4\delta)^2} > 0.$$

Introducem numărul

$$w := \frac{h_1\gamma + h_2\delta}{h} + i \frac{h_3\gamma + h_4\delta}{h} \in \mathbb{C}, \quad |w| = 1.$$

Atunci, există $z \in \mathbb{C}$, cu $\operatorname{Re} z = 0$, astfel încât $e^z = w$ [12, pag. 156].

Fie numărul $t_* := \frac{\arg z}{\beta} \in \mathbb{R}$. Au loc egalitățile

$$\begin{pmatrix} \cos \beta t_* \\ \sin \beta t_* \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} h_1\gamma + h_2\delta \\ h_3\gamma + h_4\delta \end{pmatrix} = H \cdot \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Definim numărul $D_* := \frac{1}{h} \cdot e^{\alpha t_*}$. Atunci,

$$e^{\alpha t_*} \begin{pmatrix} \cos \beta t_* \\ \sin \beta t_* \end{pmatrix} = H \cdot D_* \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Soluția s-a încheiat. \square

Pe baza identității (2.21) și a Exercițiilor 2.8, 2.7, concludem că *orice orbită nedegenerată le intersectează pe fiecare din cele două semidrepte, cea pozitivă și cea negativă, ale oricărei drepte care trece prin O a planului fazelor de câte o infinitate numărabilă de ori.*

În Figura 2.5, cele două orbite, cu *aceeași alură*, au fost colorate diferit pentru a fi distinse cu ușurință.

2.2.4 Cazul $\text{trace} > 0$, $\text{det} > 0$, $\text{discr} < 0$

Singura deosebire, din punctul de vedere al desenului de mână, privește *triunghiurile negre* care ilustrează *sensul de parcurs*: ele trebuie reorientate *dinspre originea O către marginile* foii de hârtie. Aceasta pentru că

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r = 0.$$

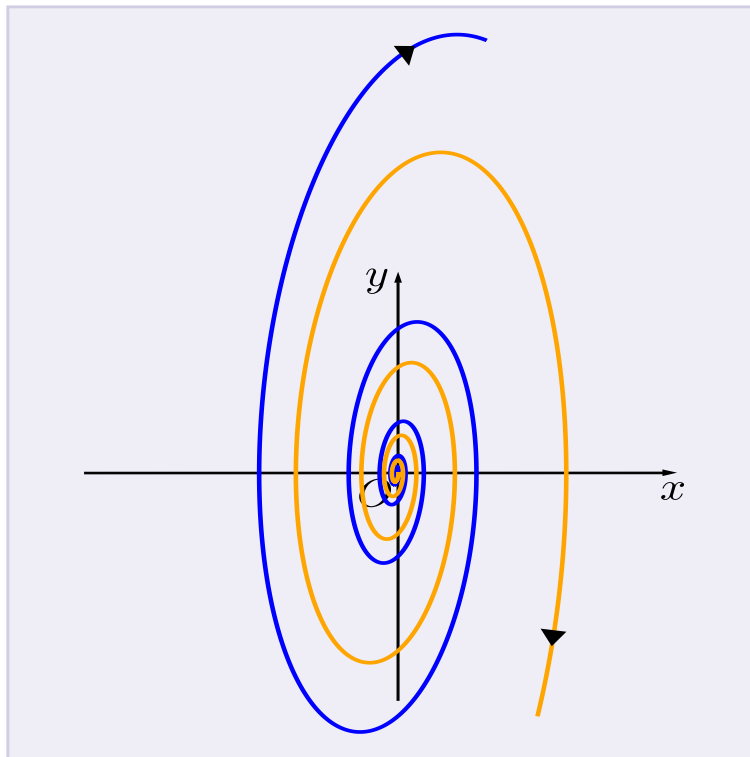


Fig. 2.6 Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' - x' + 9x = 0$. Aici, $\text{trace} > 0$, $\text{det} > 0$, $\text{discr} < 0$.

Concret, schimbarea de variabile (1.8) ne conduce la sistemul (1.9), a cărui matrice (1.2) are urma $-\text{trace}$, determinantul det și discriminantul discr . Regăsim, astfel, cazul prezentat în Subsecțiunea anterioară.

Exercițiul 2.9. În contextul *formulelor* (2.17), (2.18) și (2.19), introducem mărimile:

$$\begin{aligned} X(t) &:= C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t, \\ Y(t) &:= -C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t, \\ Z(t) &:= \alpha X(t) + \beta Y(t), \\ W(t) &:= -\beta X(t) + \alpha Y(t), \\ P(t) &:= \alpha Z(t) + \beta W(t), \\ Q(t) &:= -\beta Z(t) + \alpha W(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Atunci, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, să se dovedească valabilitatea următoarelor afirmații:

- 1) $[X(t)]^2 + [Y(t)]^2 = C_1^2 + C_2^2$;
- 2) $X\left(t + \frac{\pi}{2\beta}\right) = Y(t), X\left(t + \frac{\pi}{\beta}\right) = -X(t)$;
- 3) $\ddot{X}(t) + \beta^2 X(t) = 0$;
- 4) $[Z(t)]^2 + [W(t)]^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(C_1^2 + C_2^2)$;
- 5) $Z\left(t + \frac{\pi}{2\beta}\right) = W(t), Z\left(t + \frac{\pi}{\beta}\right) = -Z(t)$;
- 6) $\ddot{Z}(t) + \beta^2 Z(t) = 0$;
- 7) $[P(t)]^2 + [Q(t)]^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 (C_1^2 + C_2^2)$;
- 8) $P\left(t + \frac{\pi}{2\beta}\right) = Q(t), P\left(t + \frac{\pi}{\beta}\right) = -P(t)$;
- 9) $\ddot{P}(t) + \beta^2 P(t) = 0$;
- 10) $\bar{r}(t) = e^{\alpha t} [X(t)\bar{u}_1 + Y(t)\bar{u}_2]$;
- 11) $\bar{v}(t) = e^{\alpha t} [Z(t)\bar{u}_1 + W(t)\bar{u}_2]$;
- 12) $\bar{a}(t) = e^{\alpha t} [P(t)\bar{u}_1 + Q(t)\bar{u}_2]$.

Soluția exercițiului 2.9. Vezi Exercițiul 1.6, punctul 2).

Soluția s-a încheiat. \square

2.2.5 Cazul $\text{trac} \in \mathbb{R}$, $\det < 0$

Aici, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Exercițiul 2.10. (Trecerea la ecuația diferențială omogenă [9, pag. 13]) Fiind dată matricea A din (1.2), cu $b \neq 0$ și $\mathbf{discr} > 0$, îi impunem sistemului diferențial (1.1) data

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.22)$$

cu următoarele proprietăți

$$u_0 \cdot v_0 \cdot (au_0 + bv_0) \cdot (cu_0 + dv_0) \neq 0$$

și

$$a + b \cdot w_0 \neq \lambda_{1,2}, \quad w_0 := \frac{v_0}{u_0}.$$

Atunci, să se probeze afirmațiile prezentate în continuare.

1) Există un mic interval $I \subset \mathbb{R}$, centrat în 0, pe care restricția funcției u , $u|_I : I \rightarrow J$, $J := u(I) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, unde $(u, v)^T$ este cea soluție a sistemului diferențial care verifică data impusă (2.22), să fie inversabilă iar funcția $w : J \rightarrow \mathbb{R}$, cu formula

$$w(u) = \frac{v(t(u))}{u}, \quad u \in J,$$

unde $t : J \rightarrow I$ este inversa lui $u|_I$, să verifice ecuația diferențială

$$u \cdot \frac{dw}{du} = \frac{-bw^2 + (d-a)w + c}{bw + a}, \quad u \in J.$$

2) Micșorând, eventual, intervalul I , poate fi calculat numărul $C_0 > 0$ pentru care să aibă loc identitatea [11, pag. 248]

$$|v(t) - w_1 \cdot u(t)|^{\lambda_2} = C_0 \cdot |v(t) - w_2 \cdot u(t)|^{\lambda_1}, \quad t \in I,$$

unde $w_{1,2} := \frac{1}{2b} (d - a \mp \sqrt{\mathbf{discr}})$, adică

$$a + bw_1 = \lambda_2, \quad a + bw_2 = \lambda_1.$$

Soluția exercițiului 2.10. Sunt valabile relațiile

$$\begin{aligned} \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} &= \frac{dv}{du} = w + u \frac{dw}{du} \\ &= \frac{c + d \cdot \frac{v}{u}}{a + b \frac{v}{u}} = \frac{c + d \cdot w}{a + bw}, \end{aligned}$$

respectiv

$$u \frac{dw}{du} = \frac{-b(w - w_1)(w - w_2)}{bw + a}$$

și — atenție, aici d desemnează diferențiala unei funcții —

$$(a + bw_1) \frac{dw}{w - w_1} - (a + bw_2) \frac{dw}{w - w_2} = -b(w_1 - w_2) \frac{du}{u}.$$

Ajungem la

$$\frac{|w - w_1|^{\lambda_2}}{|w - w_2|^{\lambda_1}} = C_0 \cdot |u|^{\sqrt{\mathbf{discr}}}, \quad C_0 > 0.$$

Soluția s-a încheiat. \square

Exercițiul 2.11. Arătați că orice soluție a ecuației diferențiale

$$\ddot{x} - x = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

validează identitatea

$$\dot{x}^2 - x^2 = C, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă.

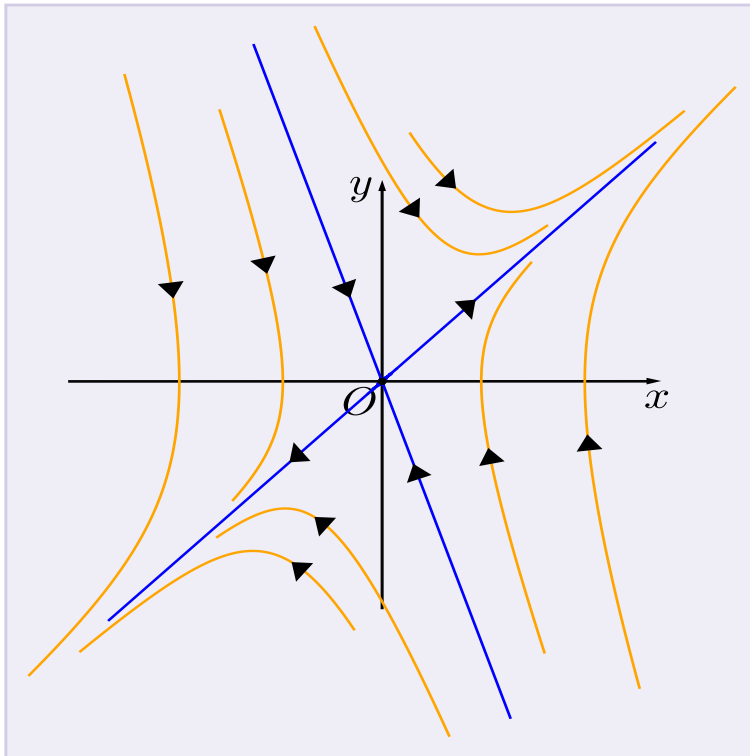


Fig. 2.7 Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + 2x' - 3x = 0$. Aici, $\text{trace} \in \mathbb{R}$, $\text{det} < 0$.

Soluția exercițiului 2.11. Transformăm ecuația într-un sistem diferențial 2×2 via expresia

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

și aplicăm Exercițiul 2.10, punctul 2).

Evident, observăm (și) că

$$2\dot{x} \cdot (\ddot{x} - x) = (\dot{x}^2 - x^2)^\bullet, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soluția s-a încheiat. \square

Refolosim calculele de la Subsecțiunea 2.2.1. Astfel, constatăm că planul fazelor este împărțit în *patru sectoare*, cu vârful în O , de către dreptele $\Delta_{\lambda_{1,2}}$ iar *orbitele nedegenerate sunt*, cu toatele, *nemărginite*. Varietățile $\Delta_{\lambda_{1,2}}$, incluzând câte *trei orbite* — originea O și semidreptele *pozitive*, respectiv cele *negative* —, sunt colorate în albastru în Figura 2.7.

Fie $C_{1,2} \in \mathbb{R}$, cu $C_1 \cdot C_2 \neq 0$. Dezvoltările asimptotice următoare, în care *ortogonalizăm* baza $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ a planului fazelor,

$$\begin{aligned} \bar{r} &= C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \bar{u}_2 \\ &= \left(C_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_1^2} \cdot C_2 e^{\lambda_2 t} \right) \bar{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \left(\bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_1^2} \bar{u}_1 \right) \\ &= \left[C_1 e^{\lambda_1 t} + o(1) \right] \bar{u}_1 + o(1) \\ &= [\text{sign}(C_1) \cdot (+\infty)] \cdot \bar{u}_1, \quad t \rightarrow +\infty, \\ \bar{v} &= \left(C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_1^2} \cdot C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \right) \bar{u}_1 + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \left(\bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_1^2} \bar{u}_1 \right) \\ &= [\text{sign}(C_1) \cdot (+\infty)] \cdot \bar{u}_1, \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \left(C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_2^2} \cdot C_1 e^{\lambda_1 t} \right) \bar{u}_2 + C_1 e^{\lambda_1 t} \left(\bar{u}_1 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_2^2} \bar{u}_2 \right) \\ &= [\text{sign}(C_2) \cdot (+\infty)] \cdot \bar{u}_2, \quad t \rightarrow -\infty, \\ \bar{v} &= \left(C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_2^2} \cdot C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \right) \bar{u}_2 + C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \left(\bar{u}_1 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_2^2} \bar{u}_2 \right) \\ &= [-\text{sign}(C_2) \cdot (+\infty)] \cdot \bar{u}_2, \quad t \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} d(\mathcal{O}(C_1, C_2), \Delta_{\lambda_1}) &= \inf_{t \in \mathbb{R}} \left| \bar{r}(t) - \left(C_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_1^2} \cdot C_2 e^{\lambda_2 t} \right) \bar{u}_1 \right| \\ &= \inf_{t \geq 0} \left| C_2 e^{\lambda_2 t} \left(\bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_1^2} \bar{u}_1 \right) \right| = 0, \end{aligned}$$

respectiv

$$d(\mathcal{O}(C_1, C_2), \Delta_{\lambda_2}) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \left| \bar{r}(t) - \left(C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_2^2} \cdot C_1 e^{\lambda_1 t} \right) \bar{u}_2 \right|$$

$$= \inf_{t \leq 0} \left| C_1 e^{\lambda_1 t} \left(\bar{u}_1 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{u_2^2} \bar{u}_2 \right) \right| = 0,$$

ne conduc la concluzia că *orice orbită nedegenerată a sistemului diferențial are drept mulțime asimptotică la $+\infty$ varietatea Δ_{λ_1} și drept mulțime asimptotică la $-\infty$ varietatea Δ_{λ_2} .*

Conform Exercițiilor 2.10 și 2.11, prin trecere la *ecuația omogenă* atașată sistemului diferențial, găsim diverse curbe în planul fazelor. Renunțând la *restricțiile vizavi de constante* ale curbelor (precum $C_0 > 0$), obținem *candidați* la *varietățile* planului fazelor; aceasta pentru că este posibil ca o anumită curbă să se compună dintr-o singură orbită, nu din *cel puțin două* orbite.

2.2.6 Cazul $\text{trac} = 0$, $\text{det} > 0$

Ne găsim în situația *valorilor proprii pur imaginare*, deci putem întrebuița calculele Subsecțiunii 2.2.3.

Astfel, cum $\alpha = \text{Re } \lambda = 0$, remarcăm că *vectorii $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ sunt ortogonali*:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = (\bar{u}_1)^T \bar{u}_2 = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = (0) = 0.$$

Coefficienții exprimării lui \bar{r} drept *combinație liniară reală* a bazei $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ a planului fazelor îndeplinesc identitatea

$$(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)^2 + (-C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t)^2 = C_1^2 + C_2^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

ceea ce ne permite construcția formulei

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) &= \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} [(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \bar{w}_1 + (-C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) \bar{w}_2] \\ &= \gamma(t) \cdot \bar{w}_1 + \eta(t) \cdot \bar{w}_2, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

unde

$$\bar{w}_i := \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cdot \bar{u}_i, \quad i \in \overline{1, 2}, \quad (2.24)$$

și

$$[\gamma(t)]^2 + [\eta(t)]^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Așadar, *particula M se deplasează pe elipsa generată de perechea de raze conjugate $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} \subset T_O \mathbb{R}^2$, unde $\vec{w}_i \in \bar{w}_i$ și $i \in \{1, 2\}$. Vezi [13, pp. 33 și urm.].*

Adaptând Exercițiile 2.8, 2.7, deducem că *orice orbită nedegenerată intersectează orice dreaptă din planul fazelor care trece prin punctul O de exact două ori*. Punctele de intersecție sunt așezate *simetric* față de O .

*Semn*ul curburii este stabilit pe baza expresiei

$$\begin{aligned}\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} &= \beta^4 (C_1^2 + C_2^2) \\ &= \mathbf{det}^2 \cdot (C_1^2 + C_2^2), \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

deci *toate orbitele nedegenerate cotesc în permanență la dreapta*.

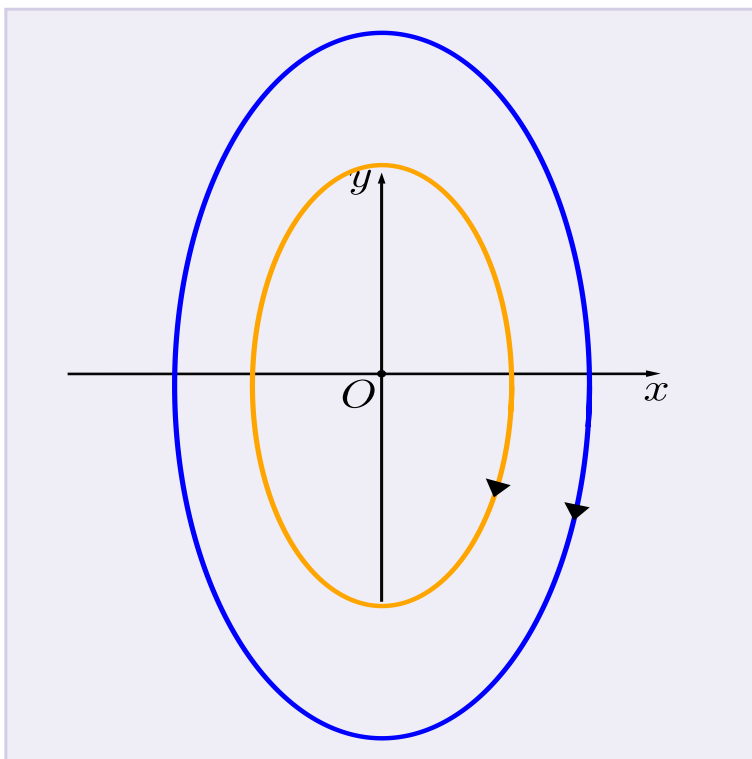


Fig. 2.8 Portretul fazelor pentru ecuația diferențială $x'' + 4x = 0$. Aici, $\mathbf{trace} = 0$, $\mathbf{det} > 0$.

În Figura 2.8, cele două orbite, cu *aceeași alură*, au fost colorate diferit din motive estetice. Nu există *varietăți speciale*: vezi estimarea (2.20).

2.2.7 Clasificarea echilibrului $(0,0)^T$ în cazul $\det \neq 0$

Soluția *identică nulă* $(0,0)^T$ produce, aici, singura orbită *degenerată* a planului fazelor: $\mathcal{O}(0,0) = \{O\}$. Vezi Lema 2.6.

În Figura 2.9, parabola de ecuație carteziană

$$(-4 \cdot \text{distr} =) \quad \det - \frac{1}{4} \cdot \text{trace}^2 = 0$$

este colorată în albastru. În cadranul al II-lea, cel din stânga-sus, se găsesc valorile $(\text{trace}, \det)^T$ ce îi corespund unui echilibru *stabil* O , adică acela ale cărui portrete conțin numai triunghiuri negre care indică *înspre originea* O . La dreapta semiaxei verticale, în cadranul I, se află valorile echilibrului *instabil*, în portretele căruia apar doar triunghiuri negre ce indică *dinspre* O (către marginile foii de hârtie).

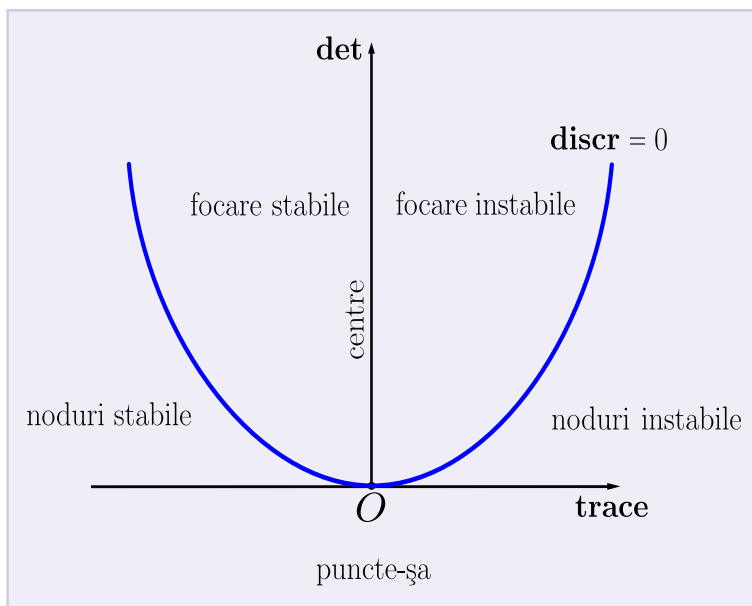


Fig. 2.9 Caracterizarea echilibrului trivial al sistemului diferențial (1.1), atunci când $\det \neq 0$, în funcție de mărimile **trace**, **det**, **discr**.

Valorile $(\text{trace}, 0)^T$, situate pe axa orizontală, *nu se folosesc în această clasificare*. Valorile de pe semiaxa verticală privesc *centrul* $(0,0)^T$ al planului fazelor iar cele situate dedesubtul axei orizontale *punctul-șă* $(0,0)^T$.

Ne referim, așadar, la echilibrul O din planul fazelor cu unul din calificativele *nod*, *focar* sau *punct-șă*. Atunci când este *instabil*, acesta constituie *izvorul*¹⁰ ori

¹⁰ În englezește, *source*.

sursa traiectoriilor. Când este *stabil*, punctul O desemnează *scurgerea*¹¹ sau *bazinul* ori *vărsarea* orbitelor. Orice punct-șă este instabil [18, pag. 47].

2.3 Cinematică în plan: o schiță

Formularea unor chestiuni privitoare la *curbele plane* în termenii mecanicii clasice stimulează, adeseori, imaginația. *Cinematica*, parte a prezentării mecanicii în care se definesc *traiectoria* unei *particule* M , *viteza* și *acelerația* acesteia, constituie *geometria* mecanicii.

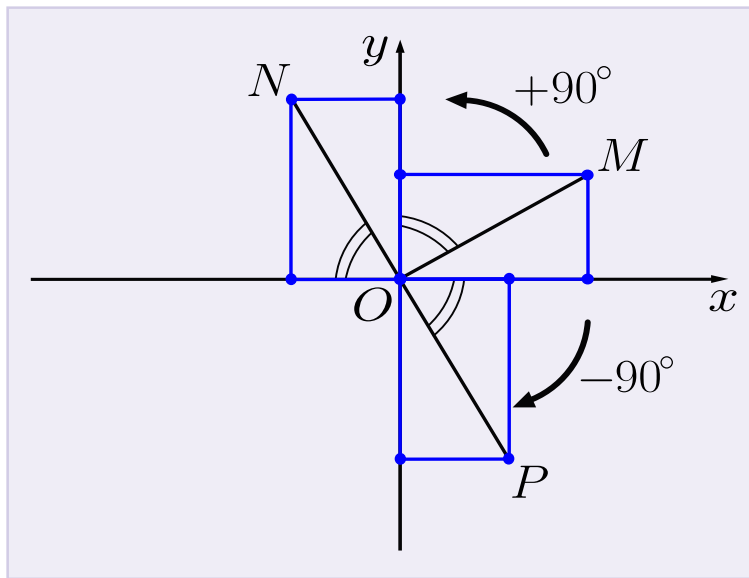


Fig. 2.10 rotații cu 90° în plan: în sens trigonometric, $M(x, y) \rightarrow N(-y, x)$, și în sens invers trigonometric, $M(x, y) \rightarrow P(y, -x)$.

În Figura 2.10, ilustrăm o problemă de geometrie euclidiană:

fiind date cele trei dreptunghiuri egale, cu laturile colorate în albastru, să se arate că unghiurile $\angle MON$ și $\angle MOP$ sunt unghiuri drepte.

Adnotările din desen ne ajută la soluționarea rapidă a problemei. Cu ajutorul său, stabilim că o rotație *pozitivă*, cu 90° , adică *la stânga* foii de hârtie, presupune următoarea schimbare de coordonate:

¹¹ În englezește, *sink*.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{+90^\circ} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

La fel, o rotație *negativă*, la dreapta foii de hârtie, are expresia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{-90^\circ} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

În continuare, vectorii *cu săgeată*, adică segmentele orientate ce pot fi *legate* în diverse puncte din plan — care devin *punctele lor de aplicație* —, sunt folosite la desenat iar vectorii *cu linie*, adică *clasele de echipolență* ale segmentelor orientate din desen, sunt întrebuințate la calcul. În particular, *vectorul de poziție* $\vec{r} := \overrightarrow{OM} \in T_O\mathbb{R}^2$ este un reprezentant al *razei vectoare* $\bar{r} := \overline{OM} \in T\mathbb{R}^2$:

$$\vec{r} \in \bar{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Primele două derivate în raport cu timpul t ale razei vectoare reprezintă *vectorul-viteză* și *vectorul-accelerație* ai particulei M . Prin *viteza* și *acelerația* lui M înțelegem reprezentanții celor două clase de echipolență legați în poziția curentă — față de *sistemul de referință* Oxy al foii de hârtie —:

$$\vec{v} \in T_M\mathbb{R}^2, \quad \vec{v} \in \bar{v}, \quad \vec{a} \in T_M\mathbb{R}^2, \quad \vec{a} \in \bar{a},$$

unde

$$\bar{v} := \dot{\bar{r}}, \quad \bar{a} := \ddot{\bar{r}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Modulul — sau *mărimea*, *magnitudinea*, ș.a.m.d. — unui vector, liber ori legat, are formula

$$u = |\bar{u}| = |\vec{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}, \quad \bar{u} \in T\mathbb{R}^2.$$

Analizăm *deplasarea* particulei M , față de sistemul de referință, pe *durata* intervalului de timp $[t_0, t_1]$, adică presupunem că

$$\left[\dot{x}(t) \right]^2 + \left[\dot{y}(t) \right]^2 > 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.26)$$

ceea ce se traduce prin: *particula are viteză (pe traiectoria ei)*,

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{\left(\dot{x} \right)^2 + \left(\dot{y} \right)^2} > 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Ca și până acum, lucrăm frecvent fără a preciza argumentul funcțiilor.

Subînțelegem că studiem un arc (fragment) de curbă care constituie o *curbă simplă* — adică, este *imagea* în spațiul euclidian punctual \mathbb{R}^3 printr-un *homeomorfism* a unui *interval deschis* (la capete), nu neapărat mărginit, de numere reale —; practic,

imaginându-ne fragmentul de curbă ca fiind făcut din *ață de cusut*, vom obține un “segment” de *ață* dacă tragem de *capetele* sale. Evident, cercul-unitate nu este curbă simplă, însă un sfert de cerc este o curbă simplă.

Curba simplă pe care investigăm deplasarea particulei M reprezintă *traectoria* lui M .

Introducem *coordonata curbilinie* s ca fiind *lungimea* arcului de curbă parcurs de la începutul analizei și până în *prezent*:

$$s(p) = \int_{t_0}^p \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) (t) dt = \int_{t_0}^p v dt, \quad p \in [t_0, t_1].$$

Versorul tangentei la traiectorie în punctul curent, $\vec{\tau} \in T_M \mathbb{R}^2$, se exprimă prin

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}} = \frac{1}{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \vec{\tau} \in \vec{\tau}.$$

Remarcăm că $\tau = |\vec{\tau}| = 1$. Din acest motiv, $\vec{\tau}$ se mai numește și *vectorul-unitate* al vectorului-director al tangentei.

Prin derivare în raport cu s ,

$$0 = \frac{1}{2} (\vec{\tau}^2)' = \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds},$$

de unde, dacă $\frac{d\vec{\tau}}{ds} \neq 0$, deducem că *vectorii* $\vec{\tau}$ și $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ *sunt ortogonali*.

Avem relațiile

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{\dot{s}} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{v} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right) \cdot,$$

respectiv

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right) \cdot &= -\frac{\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \left[-\frac{\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Am ajuns la

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} \right]. \quad (2.27)$$

Observăm că, *via* formula (2.25), vectorul $\frac{d\vec{\tau}}{ds} \in T_M\mathbb{R}^2$, unde $\frac{d\vec{\tau}}{ds} \in \frac{d\vec{\tau}}{ds}$, este rotit la dreapta cu 90° față de versorul tangentei $\vec{\tau}$ atunci când

$$\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} > 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2.28)$$

Reorganizând formula pentru a evidenția o rotație *la stânga* a versorului tangentei, introducem *curbura cu semn*, în punctul curent M , a traiectoriei:

$$k_{1s} := -\frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\bar{v}, \bar{a}, \bar{k})}{v^3}. \quad (2.29)$$

Așadar, dacă ne *poziționăm* în punctul de aplicație — punctul curent — al versorului $\vec{\tau}$ și *privim* către săgeata sa, versorul

$$\vec{v}_s \in T_M\mathbb{R}^2, \quad \vec{v}_s \in \bar{v}_s := \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix},$$

ne va apărea ca rotit *la stânga* cu 90° , pe foaia de hârtie. Atunci când curbura cu semn este pozitivă în punctul curent, *traiectoria va coti la stânga*. În caz contrar, *traiectoria va coti la dreapta*.

Capitolul 3

RK4: o metodă monopas cu patru stadii

3.1 Generalități

Sistemele de ecuații diferențiale ordinare, aduse în formă normală — precum (1.1) —

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t), v(t)), \\ v'(t) = g(u(t), v(t)), \end{cases}$$

pot fi *aproximate* prin înlocuirea membrilor *din dreapta* ai ecuațiilor cu *dezvoltări limitate* în serie Taylor ale lor [3, pag. 42]:

$$\begin{aligned} u'(t) = f(u(t), v(t)) &\simeq f(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot [u(t) - u_0] + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot [v(t) - v_0] \\ &+ \dots \\ &= f(u_0, v_0) + a \cdot [u(t) - u_0] + b \cdot [v(t) - v_0] + \dots \\ &= a[u(t) - u_0] + b[v(t) - v_0] + \dots, \end{aligned} \tag{3.1}$$

unde $u_0 := u(t_0)$, $v_0 := v(t_0)$ iar $(u_0, v_0)^T \in \mathbb{R}^2$ este o *soluție constantă* a sistemului diferențial. Adică, o soluție a sistemului algebric

$$\begin{cases} f(u_0, v_0) = 0, \\ g(u_0, v_0) = 0. \end{cases}$$

Ca de obicei, socotim că funcțiile f, g sunt *netede*, adică admit derivate parțiale de orice ordin natural, continue în raport cu ansamblul variabilelor, pe întreg domeniul de definiție.

Dacă păstrăm din dezvoltarea (3.1) numai *primii trei termeni*, și anume

$$\begin{cases} u'(t) = a[u(t) - u_0] + b[v(t) - v_0], \\ v'(t) = c[u(t) - u_0] + d[v(t) - v_0], \end{cases}$$

atunci sistemul diferențial rezultat este numit *liniarizarea* [2, pag. 116] sau *prima aproximație* [11, pag. 243] a sistemului original. Aici, evident, $c := \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)$, $d := \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)$. Schimbarea de variabile

$$\begin{cases} U(t) = u(t) - u_0, \\ V(t) = v(t) - v_0, \end{cases}$$

aplicată acestei prime aproximații, ne conduce la sistemul liniar (1.1), scris cu necunoscutele U, V .

Este de așteptat ca diferențele de comportament — care apar odată cu variația *pe termen lung* a argumentului: $t \rightarrow +\infty$ ori $t \rightarrow -\infty$ — dintre soluțiile sistemului original și cele ale aproximației să fie notabile: de exemplu, soluțiile sistemului liniarizat există pe toată dreapta reală, proprietate care nu se regăsește, de cele mai multe ori, la soluțiile sistemului original; *reparametrizarea* sistemului original, pentru a avea soluții definite pe întreaga dreaptă reală, este o chestiune complicată [9, pag. 198].

Pentru a *ameliora* diferențele, regândim aproximarea: de la o *aproximare a formulei* din membrul drept al unei ecuații — independentă de soluția generală a sistemului — trecem la o *dezvoltare* în serie Taylor a *soluției însăși*, adică la expresia

$$u(t) = u(t_0) + u'(t_0) \cdot (t - t_0) + u''(t_0) \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} + \dots$$

în care vom insera formulele derivatelor deduse din prezentarea sistemului:

$$\begin{aligned} u'(t_0) &= f(u(t), v(t))|_{t=t_0} = f(u_0, v_0), \\ u''(t_0) &= \frac{d}{dt} [f(u(t), v(t))] \Big|_{t=t_0} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(t), v(t)) \cdot v'(t) \right) \Big|_{t=t_0} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot f + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot g \right) (u(t), v(t)) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot f(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot g(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Prima tehnică de aproximare, cea a liniarizării sistemului în jurul unei soluții constante, conduce la rezultate spectaculoase în situații importante din practică, vezi [18, pag. 75].

Cât despre cea de-a doua tehnică, ea poate fi rafinată fie *mărind* numărul de termeni din dezvoltarea în serie Taylor pe care să îi întrebuițăm la aproximare — obținându-se așa-numitele *metode numerice Taylor* [3, pag. 68] — fie introducând *valori intermediare* ale argumentelor funcțiilor f și g : *metodele Runge-Kutta* (RK) [3, pag. 70]. Punctele (valorile argumentelor) intermediare sunt alese astfel încât să fie păstrată *acuratețea* metodelor numerice Taylor corespunzătoare [3, *ibid.*].

Procedeul — de introducere a unui set de puncte intermediare — *C. Runge* îi păstrează pe primii patru termeni din dezvoltarea în serie Taylor [11, pag. 214, Teorema I] a soluției unei ecuații diferențiale scalare iar *procedeul W. Kutta* pe primii cinci [11, pag. 219, Teorema III]. Aceste tehnici au condus la construcția unei serii de metode de aproximare pentru care descrierea punctelor intermediare se realizează în formă tabelară: *tabloul (J.C.) Butcher*¹ [3, pp. 74, 86]. Numărul de linii ale tabloului (matricei) ne dă numărul de *stadii*² al metodei Runge-Kutta.

3.2 Construcția relațiilor de recurență. Matricea H_4

Sistemului diferențial (1.1) îi atașăm funcțiile $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cu formulele³

$$\begin{cases} f(x, y, t) = a \cdot x + b \cdot y, \\ g(x, y, t) = c \cdot x + d \cdot y. \end{cases}$$

Fie $h > 0$, fixat arbitrar, un număr pe care îl vom numi *pasul*⁴ — constant! — al algoritmului de calcul numeric. Plecând de la *data impusă* (1.10), $(u_0, v_0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$, introducem *nodurile* [3, pag. 16]

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ t_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_n + kx_{RK4,n} \\ y_n + ky_{RK4,n} \\ t_n + h \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aici, cantitățile $kx_{RK4,n}$ și $ky_{RK4,n}$ sunt rezultatul unui calcul realizat în patru stadii. Ultima atribuire constituie *relația de recurență* (vectorială) a algoritmului RK4 [3, pag. 74].

Stadiul întâi. Calculăm mărimile:

$$\begin{cases} kx_{1,n} := f(x_n, y_n, t_n), \\ ky_{1,n} := g(x_n, y_n, t_n), \\ zx_{1,n} := x_n + \frac{h}{2} \cdot kx_{1,n}, \\ zy_{1,n} := y_n + \frac{h}{2} \cdot ky_{1,n}. \end{cases}$$

Astfel,

$$\begin{aligned} kx_{1,n} &= ax_n + by_n, \\ ky_{1,n} &= cx_n + dy_n, \end{aligned}$$

¹ În englezește, *Butcher tableau*.

² În englezește, *stage* (sing.).

³ Pentru a păstra generalitatea relațiilor algebrice din cadrul algoritmului, introducem și *timpul* t ca argument.

⁴ În englezește, *stepsize* [3, pag. 78].

$$\begin{aligned}
zx_{1,n} &= x_n + \frac{h}{2}(ax_n + by_n) \\
&= \left(1 + \frac{ah}{2}\right)x_n + \frac{bh}{2}y_n, \\
zy_{1,n} &= y_n + \frac{h}{2}(cx_n + dy_n) \\
&= \frac{ch}{2}x_n + \left(1 + \frac{dh}{2}\right)y_n.
\end{aligned}$$

Stadiul al doilea. Calculăm mărimile:

$$\begin{cases}
kx_{2,n} := f(zx_{1,n}, zy_{1,n}, t_n + \frac{h}{2}), \\
ky_{2,n} := g(zx_{1,n}, zy_{1,n}, t_n + \frac{h}{2}), \\
zx_{2,n} := x_n + \frac{h}{2} \cdot kx_{2,n}, \\
zy_{2,n} := y_n + \frac{h}{2} \cdot ky_{2,n}.
\end{cases}$$

Au loc egalitățile:

$$\begin{aligned}
kx_{2,n} &= ax_{1,n} + bzy_{1,n} \\
&= a \left[\left(1 + \frac{ah}{2}\right)x_n + \frac{bh}{2}y_n \right] + b \left[\frac{ch}{2}x_n + \left(1 + \frac{dh}{2}\right)y_n \right] \\
&= x_n \left(a + \frac{a^2h}{2} + \frac{bch}{2} \right) + y_n \left(\frac{abh}{2} + b + \frac{bdh}{2} \right) \\
&= \left[a + (a^2 + bc) \frac{h}{2} \right] x_n + \left[b + (ab + bd) \frac{h}{2} \right] y_n.
\end{aligned}$$

Observăm că, fiind dată matricea A a coeficienților sistemului diferențial, vezi (1.2), avem

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Introducem notațiile:

$$A^k = \left(A_{ij}^k \right)_{i,j \in \overline{1,2}}, \quad k \in \overline{1,4},$$

unde $A^1 := A$.

Așadar,

$$kx_{2,n} = \left(a + A_{11}^2 \cdot \frac{h}{2} \right) x_n + \left(b + A_{12}^2 \cdot \frac{h}{2} \right) y_n.$$

La fel,

$$\begin{aligned}
ky_{2,n} &= czx_{1,n} + dzx_{1,n} \\
&= \left[c + (ac + dc) \frac{h}{2} \right] x_n + \left[d + (d^2 + bc) \frac{h}{2} \right] y_n \\
&= \left(c + A_{21}^2 \cdot \frac{h}{2} \right) x_n + \left(d + A_{22}^2 \cdot \frac{h}{2} \right) y_n.
\end{aligned}$$

Apoi,

$$\begin{aligned}
zx_{2,n} &= x_n + \frac{h}{2} kx_{2,n} \\
&= x_n + \frac{h}{2} \left[\left(a + A_{11}^2 \frac{h}{2} \right) x_n + \left(b + A_{12}^2 \frac{h}{2} \right) y_n \right] \\
&= \left(1 + a \cdot \frac{h}{2} + A_{11}^2 \cdot \frac{h^2}{4} \right) x_n + \left(b \cdot \frac{h}{2} + A_{12}^2 \cdot \frac{h^2}{4} \right) y_n,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
zy_{2,n} &= y_n + \frac{h}{2} ky_{2,n} \\
&= \left(c \cdot \frac{h}{2} + A_{21}^2 \cdot \frac{h^2}{4} \right) x_n + \left(1 + d \cdot \frac{h}{2} + A_{22}^2 \cdot \frac{h^2}{4} \right) y_n.
\end{aligned}$$

Stadiul al treilea. Calculăm mărimile:

$$\begin{cases}
kx_{3,n} := f(zx_{2,n}, zy_{2,n}, t_n + \frac{h}{2}), \\
ky_{3,n} := g(zx_{2,n}, zy_{2,n}, t_n + \frac{h}{2}), \\
zx_{3,n} := x_n + h \cdot kx_{3,n}, \\
zy_{3,n} := y_n + h \cdot ky_{3,n}.
\end{cases}$$

Astfel,

$$\begin{aligned}
kx_{3,n} &= azx_{2,n} + bzy_{2,n} \\
&= a \left[\left(1 + a \frac{h}{2} + A_{11}^2 \frac{h^2}{4} \right) x_n + \left(b \frac{h}{2} + A_{12}^2 \frac{h^2}{4} \right) y_n \right] \\
&\quad + b \left[\left(c \frac{h}{2} + A_{21}^2 \frac{h^2}{4} \right) x_n + \left(1 + d \frac{h}{2} + A_{22}^2 \frac{h^2}{4} \right) y_n \right] \\
&= x_n \left(a + a^2 \frac{h}{2} + aA_{11}^2 \frac{h^2}{4} + bc \frac{h}{2} + bA_{21}^2 \frac{h^2}{4} \right) \\
&\quad + y_n \left(ab \frac{h}{2} + aA_{12}^2 \frac{h^2}{4} + b + bd \frac{h}{2} + bA_{22}^2 \frac{h^2}{4} \right) \\
&= \left[a + (a^2 + bc) \frac{h}{2} + (aA_{11}^2 + bA_{21}^2) \frac{h^2}{4} \right] x_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[b + (ab + bd) \frac{h}{2} + (aA_{12}^2 + bA_{22}^2) \frac{h^2}{4} \right] y_n \\
& = \left(a + A_{11}^2 \cdot \frac{h}{2} + A_{11}^3 \cdot \frac{h^2}{4} \right) x_n + \left(b + A_{12}^2 \cdot \frac{h}{2} + A_{12}^3 \cdot \frac{h^2}{4} \right) y_n
\end{aligned}$$

deoarece

$$A^3 = A \cdot B = \begin{pmatrix} aB_{11} + bB_{21} & aB_{12} + bB_{22} \\ cB_{11} + dB_{21} & cB_{12} + dB_{22} \end{pmatrix}, \quad B = (B_{ij})_{i,j \in \overline{1,2}}, \quad (3.2)$$

unde $B := A^2$.

În același mod,

$$\begin{aligned}
ky_{3,n} & = czx_{2,n} + dzy_{2,n} \\
& = \left(c + A_{21}^2 \cdot \frac{h}{2} + A_{21}^3 \cdot \frac{h^2}{4} \right) x_n + \left(d + A_{22}^2 \cdot \frac{h}{2} + A_{22}^3 \cdot \frac{h^2}{4} \right) y_n.
\end{aligned}$$

Mai departe,

$$\begin{aligned}
zx_{3,n} & = x_n + h \cdot kx_{3,n} \\
& = x_n + h \left[\left(a + A_{11}^2 \frac{h}{2} + A_{11}^3 \frac{h^2}{4} \right) x_n + \left(b + A_{12}^2 \frac{h}{2} + A_{12}^3 \frac{h^2}{4} \right) y_n \right] \\
& = \left(1 + a \cdot h + A_{11}^2 \cdot \frac{h^2}{2} + A_{11}^3 \cdot \frac{h^3}{4} \right) x_n + \left(b \cdot h + A_{12}^2 \cdot \frac{h^2}{2} + A_{12}^3 \cdot \frac{h^3}{4} \right) y_n,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
zy_{3,n} & = y_n + h \cdot ky_{3,n} \\
& = \left(c \cdot h + A_{21}^2 \cdot \frac{h^2}{2} + A_{21}^3 \cdot \frac{h^3}{4} \right) x_n + \left(1 + d \cdot h + A_{22}^2 \cdot \frac{h^2}{2} + A_{22}^3 \cdot \frac{h^3}{4} \right) y_n.
\end{aligned}$$

Stadiul al patrulea. Calculăm mărimile:

$$\begin{cases} kx_{4,n} := f(zx_{3,n}, zy_{3,n}, t_n + h), \\ ky_{4,n} := g(zx_{3,n}, zy_{3,n}, t_n + h). \end{cases}$$

Așadar,

$$\begin{aligned}
kx_{4,n} & = azx_{3,n} + bzy_{3,n} \\
& = a \left[\left(1 + ah + A_{11}^2 \frac{h^2}{2} + A_{11}^3 \frac{h^3}{4} \right) x_n + \left(bh + A_{12}^2 \frac{h^2}{2} + A_{12}^3 \frac{h^3}{4} \right) y_n \right] \\
& + b \left[\left(ch + A_{21}^2 \frac{h^2}{2} + A_{21}^3 \frac{h^3}{4} \right) x_n + \left(1 + dh + A_{22}^2 \frac{h^2}{2} + A_{22}^3 \frac{h^3}{4} \right) y_n \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_n \left(a + a^2h + aA_{11}^2 \frac{h^2}{2} + aA_{11}^3 \frac{h^3}{4} + bch + bA_{21}^2 \frac{h^2}{2} + bA_{21}^3 \frac{h^3}{4} \right) \\
&+ y_n \left(abh + aA_{12}^2 \frac{h^2}{2} + aA_{12}^3 \frac{h^3}{4} + b + bdh + bA_{22}^2 \frac{h^2}{2} + bA_{22}^3 \frac{h^3}{4} \right) \\
&= \left[a + (a^2 + bc)h + (aA_{11}^2 + bA_{21}^2) \frac{h^2}{2} + \left(aA_{11}^3 + bA_{21}^3 \frac{h^3}{4} \right) \right] x_n \\
&+ \left[b + (ab + bd)h + (aA_{12}^2 + bA_{22}^2) \frac{h^2}{2} + (aA_{12}^3 + bA_{22}^3) \frac{h^3}{4} \right] y_n \\
&= \left(a + A_{11}^2 \cdot h + A_{11}^3 \cdot \frac{h^2}{4} + A_{11}^4 \cdot \frac{h^3}{4} \right) x_n \\
&+ \left(b + A_{12}^2 \cdot h + A_{12}^3 \cdot \frac{h^2}{2} + A_{12}^4 \cdot \frac{h^3}{4} \right) y_n,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
ky_{4,n} &= czx_{3,n} + dzy_{3,n} \\
&= \left(c + A_{21}^2 \cdot h + A_{21}^3 \cdot \frac{h^2}{4} + A_{21}^4 \cdot \frac{h^3}{4} \right) x_n \\
&+ \left(d + A_{22}^2 \cdot h + A_{22}^3 \cdot \frac{h^2}{2} + A_{22}^4 \cdot \frac{h^3}{4} \right) y_n.
\end{aligned}$$

Am utilizat o identitate asemănătoare lui (3.2), și anume $A^4 = A \cdot B$ pentru $B = A^3$.

Mărimile $kx_{RK4,n}$, $ky_{RK4,n}$ se introduc prin expresiile:

$$\begin{cases} kx_{RK4,n} = \frac{h}{6} \cdot (kx_{1,n} + 2kx_{2,n} + 2kx_{3,n} + kx_{4,n}), \\ ky_{RK4,n} = \frac{h}{6} \cdot (ky_{1,n} + 2ky_{2,n} + 2ky_{3,n} + ky_{4,n}). \end{cases}$$

Astfel,

$$\begin{aligned}
kx_{RK4,n} &= \frac{h}{6} \left\{ (ax_n + by_n) + 2 \left[\left(a + A_{11}^2 \frac{h}{2} \right) x_n + \left(b + A_{12}^2 \frac{h}{2} \right) y_n \right] \right. \\
&+ 2 \left[\left(a + A_{11}^2 \frac{h}{2} + A_{11}^3 \frac{h^2}{4} \right) x_n + \left(b + A_{12}^2 \frac{h}{2} + A_{12}^3 \frac{h^2}{4} \right) y_n \right] \\
&+ \left[\left(a + A_{11}^2 h + A_{11}^3 \frac{h^2}{2} + A_{11}^4 \frac{h^3}{4} \right) x_n \right. \\
&+ \left. \left. \left(b + A_{12}^2 h + A_{12}^3 \frac{h^2}{2} + A_{12}^4 \frac{h^3}{4} \right) y_n \right] \right\} \\
&= x_n \left[h \left(2 \cdot \frac{a}{6} + 2 \cdot \frac{a}{3} \right) + h^2 \left(3 \cdot \frac{A_{11}^2}{6} \right) + h^3 \left(2 \cdot \frac{A_{11}^3}{12} \right) + h^4 \left(\frac{A_{11}^4}{24} \right) \right] \\
&+ y_n \left[h \left(2 \cdot \frac{b}{6} + 2 \cdot \frac{b}{3} \right) + h^2 \left(3 \cdot \frac{A_{12}^2}{6} \right) + h^3 \left(2 \cdot \frac{A_{12}^3}{12} \right) + h^4 \left(\frac{A_{12}^4}{24} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_n \left(h \cdot a + h^2 \cdot \frac{A_{11}^2}{2} + h^3 \cdot \frac{A_{11}^3}{6} + h^4 \cdot \frac{A_{11}^4}{24} \right) \\
&+ y_n \left(h \cdot b + h^2 \cdot \frac{A_{12}^2}{2} + h^3 \cdot \frac{A_{12}^3}{6} + h^4 \cdot \frac{A_{12}^4}{24} \right) \\
&= \left(a \cdot \frac{h}{1!} + A_{11}^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + A_{11}^3 \cdot \frac{h^3}{3!} + A_{11}^4 \cdot \frac{h^4}{4!} \right) x_n \\
&+ \left(b \cdot \frac{h}{1!} + A_{12}^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + A_{12}^3 \cdot \frac{h^3}{3!} + A_{12}^4 \cdot \frac{h^4}{4!} \right) y_n,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
ky_{RK4,n} &= \left(c \cdot \frac{h}{1!} + A_{21}^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + A_{21}^3 \cdot \frac{h^3}{3!} + A_{21}^4 \cdot \frac{h^4}{4!} \right) x_n \\
&+ \left(d \cdot \frac{h}{1!} + A_{22}^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + A_{22}^3 \cdot \frac{h^3}{3!} + A_{22}^4 \cdot \frac{h^4}{4!} \right) y_n.
\end{aligned}$$

Matriceal, scriem că

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} kx_{RK4,n} \\ ky_{RK4,n} \end{pmatrix} &= \frac{h}{1!} \cdot A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2!} \cdot A^2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{h^3}{3!} \cdot A^3 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{h^4}{4!} \cdot A^4 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{h}{1!} A + \frac{h^2}{2!} A^2 + \frac{h^3}{3!} A^3 + \frac{h^4}{4!} A^4 \right) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Introducem matricea

$$H_4(A, h) := I_2 + hA + \frac{h^2}{2!} A^2 + \frac{h^3}{3!} A^3 + \frac{h^4}{4!} A^4.$$

Atunci, primele două relații de recurență scalare ale algoritmului numeric *într-un singur*⁵ pas RK4 se exprimă vectorial prin formula:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = H_4(A, h) \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Metoda de aproximare oferită de RK4 este *de ordinul al patrulea*, adică produce *erori globale* cu estimarea asimptotică $O(h^4)$ când $h \searrow 0$ [3, pag. 78, 79]: pe *mici intervale* construite în jurul datelor impuse, *eroarea locală* este de forma $O(h^5)$ când $h \searrow 0$ [11, pag. 221].

Algoritmul estimează valorile soluției $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ a sistemului diferențial (1.1) la momentele de timp $t_n = nh$, unde $n \in \mathbb{N}$. Pentru a calcula astfel de valori la mo-

⁵ Vezi [3, pag. 75]. În englezește, *one-step method*. Așa cum se poate vedea din original, numărul h este *lungimea pasului de integrare numerică* a sistemului diferențial pe când metoda propriu-zisă se realizează într-o *singură etapă*: dată de trecerea de la valorile calculate la momentul t_n la cele de la momentul t_{n+1} . Formulările prescurtate funcționează aici fără pericol de confuzie.

mente care nu fac parte din nodurile algoritmului, utilizăm *interpolarea liniară*: adică, construim *linia poligonală* care are drept capete ale segmentelor componente nodurile $(x_n, y_n, t_n)^T$, $n \in \mathbb{N}$ [3, pag. 18].

3.3 Captarea soluțiilor periodice

Fie $\omega > 0$, fixat arbitrar. Ecuația diferențială

$$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

se rescrie ca sistem diferențial, liniar și omogen, de ordinul întâi astfel:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Așadar, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

Soluția generală a ecuației are expresia

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{x_1}{\omega} \cdot \sin(\omega t), \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $x_0 := x(0)$ și $x_1 := x'(0)$. De aici,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

cu $(x_0, x_1)^T \in \mathbb{R}^2$ fixate arbitrar.

Se observă că

$$A^{2m} = (-1)^m \omega^{2m} I_2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Au loc relațiile

$$\begin{aligned} H_4(A, h) &= I_2 + hA + \frac{h^2}{2}A^2 + \frac{h^3}{6}A^3 + \frac{h^4}{24}A^4 \\ &= I_2 + hA + \frac{h^2}{2}(-\omega^2 I_2) + \frac{h^3}{6}(-\omega^2 A) + \frac{h^4}{24}(\omega^4 I_2) \\ &= \left[1 - \frac{(\omega h)^2}{2} + \frac{(\omega h)^4}{24} \right] \cdot I_2 + \left(h - \frac{\omega^2 h^3}{6} \right) \cdot A \\ &= \left[1 - \frac{(\omega h)^2}{2} + \frac{(\omega h)^4}{24} \right] I_2 + \frac{1}{\omega} \left[(\omega h) - \frac{(\omega h)^3}{6} \right] A. \end{aligned}$$

Introducem cantitățile

$$\alpha(h) := 1 - \frac{(\omega h)^2}{2} + \frac{(\omega h)^4}{24}, \quad \beta(h) := \frac{1}{\omega} \left[\omega h - \frac{(\omega h)^3}{6} \right], \quad h > 0.$$

Fie $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 18$, fixat arbitrar. Atunci, folosind dezvoltarea dată de *binomul lui (I.) Newton*, avem

$$\begin{aligned} [H_4(A, h)]^n &= [\alpha(h)I_2 + \beta(h)A]^n = \sum_{k=0}^n C_n^k [\alpha(h)]^{n-k} [\beta(h)]^k A^k \\ &= \left[\sum_{m \in \mathbb{N}, m \geq 0, 2m \leq n} C_n^{2m} \alpha^{n-2m} \beta^{2m} \cdot (-1)^m \omega^{2m} \right] \cdot I_2 \\ &\quad + \left[\sum_{m \in \mathbb{N}, m \geq 0, 2m+1 \leq n} C_n^{2m+1} \alpha^{n-(2m+1)} \beta^{2m+1} \cdot (-1)^m \omega^{2m} \right] \cdot A, \end{aligned}$$

unde $C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k \in \overline{0, n}$.

Introducem numerele $z \in \mathbb{C}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ cu formulele

$$\begin{aligned} z = z(h) &:= \alpha(h) + i\omega\beta(h) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \omega^2\beta^2} (\cos \theta + i \sin \theta), \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2\beta^2}}, \\ \sin \theta = \frac{\omega\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2\beta^2}}. \end{cases}$$

Astfel,

$$\theta = \theta(h) := \arctan \frac{\omega \cdot \beta(h)}{\alpha(h)},$$

pentru h suficient de mic — $\alpha(h) = 1 + o(1)$ când $h \searrow 0$ —.

Lema 3.1. *Sunt valabile egalitățile*

$$\begin{cases} S_1 = (\alpha^2 + \omega^2\beta^2)^{\frac{n}{2}} \cos n\theta, \\ \omega \cdot S_2 = (\alpha^2 + \omega^2\beta^2)^{\frac{n}{2}} \sin n\theta, \end{cases}$$

unde

$$S_1 = S_1(h, n) := \sum_{m \in \mathbb{N}, m \geq 0, 2m \leq n} C_n^{2m} \cdot (-1)^m \alpha^{n-2m} \beta^{2m} \omega^{2m}$$

și

$$S_2 = S_2(h, n) := \sum_{m \in \mathbb{N}, m \geq 0, 2m+1 \leq n} C_n^{2m+1} \cdot (-1)^m \alpha^{n-(2m+1)} \beta^{2m+1} \omega^{2m}.$$

Demonstrație. Remarcăm că

$$\begin{aligned} z^n &= (\alpha + i\omega\beta)^n \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}, m \geq 0, 2m \leq n} C_n^{2m} \alpha^{n-2m} (i\omega\beta)^{2m} \\ &\quad + \sum_{m \in \mathbb{N}, m \geq 0, 2m+1 \leq n} C_n^{2m+1} \alpha^{n-(2m+1)} (i\omega\beta)^{2m+1} \\ &= S_1 + i \cdot \omega S_2. \end{aligned}$$

Aplicăm formula lui (A.) de Moivre:

$$z^n = (\alpha^2 + \omega^2 \beta^2)^{\frac{n}{2}} (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Ridicând la pătrat cantitățile α și β , avem

$$\alpha^2 = 1 - (\omega h)^2 + \frac{(\omega h)^4}{3} - \frac{(\omega h)^6}{24} + \frac{(\omega h)^8}{576},$$

respectiv

$$\beta^2 = \frac{1}{\omega^2} \left[(\omega h)^2 - \frac{(\omega h)^4}{3} + \frac{(\omega h)^6}{36} \right],$$

de unde

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \omega^2 \beta^2 &= 1 - \frac{(\omega h)^6}{72} + \frac{(\omega h)^8}{576} \\ &= \left\{ 1 - 2 \frac{(\omega h)^6}{144} + \left[\frac{(\omega h)^6}{144} \right]^2 \right\} + \frac{(\omega h)^8}{576} - \frac{(\omega h)^{12}}{144^2} \\ &= \left[1 - \frac{(\omega h)^6}{144} \right]^2 + \frac{(\omega h)^8}{576} - \frac{(\omega h)^{12}}{20736}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

În cele ce urmează, presupunem că

$$(\omega h)^7 \simeq 0. \quad (3.5)$$

Lema 3.2. Este valabilă aproximarea

$$\sqrt{\alpha^2 + \omega^2 \beta^2} = 1 - \frac{(\omega h)^6}{144}.$$

Demonstrație. Ridicăm relația la pătrat și ținem seama de ultima egalitate din (3.4). Faptul că membrul drept al egalității din enunț este nenegativ va rezulta din (3.6).

Justificarea s-a încheiat. \square

Apelând din nou la binomul lui Newton, deducem⁶ că

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \omega^2 \beta^2)^{\frac{n}{2}} &= \left(\sqrt{\alpha^2 + \omega^2 \beta^2} \right)^n \\ &= \left[1 - \frac{(\omega h)^6}{144} \right]^n \\ &= 1 + C_n^1 \cdot \left[-\frac{(\omega h)^6}{144} \right] + \dots \\ &= 1 - \frac{n}{144} \cdot (\omega h)^6. \end{aligned}$$

Introducem prima restricție *explicită* privind cantitățile h, n :

$$(\omega h)^6 \leq \min \left\{ 8, \frac{144}{n} \right\}. \quad (3.6)$$

Lema 3.3. *Avem*

$$\cos \theta(h) > 0, \quad \sin \theta(h) > 0,$$

atunci când pasul h îndeplinește condiția (3.6). În particular, $\theta(h) \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Demonstrație. Considerăm expresia *bipătrată*

$$E(y) := \frac{y^4}{24} - \frac{y^2}{2} + 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Privind-o ca pe un *trinom de gradul al II-lea*, îi calculăm discriminantul: $\Delta_y = \frac{1}{12}$. Astfel, este valabilă următoarea *factorizare* a expresiei:

$$E(y) = \frac{1}{24} (y^2 - 6 - \sqrt{12}) (y^2 - 6 + \sqrt{12}), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Deducem că $E(y) > 0$ pentru orice număr y cu $y^2 < 6 - \sqrt{12}$.
Deoarece $n \geq 18$,

$$\frac{144}{n} \leq \frac{144}{18} = 8,$$

respectiv

$$(\omega h)^2 \leq \sqrt[3]{\frac{144}{n}} \leq 2 < 6 - \sqrt{12}.$$

Așadar,

$$\cos \theta = \frac{E(\omega n)}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2 \beta^2}} > 0, \quad \sin \theta = \frac{\omega h}{6} \cdot \frac{6 - (\omega h)^2}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2 \beta^2}} > 0.$$

⁶ Practic, întrebuițăm estimarea $(1 - q)^n = 1 - qn$ atunci când $q^2 \simeq 0$. Pentru ca estimarea să rămână *număr nenegativ*, impunem ca $0 \leq q \leq \frac{1}{n}$.

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 3.4. *Are loc aproximarea*

$$\frac{\omega\beta}{\alpha} = \omega h + \frac{(\omega h)^3}{3} + \frac{(\omega h)^5}{8}.$$

Demonstrație. Introducem mărimea $x = x(h) := \frac{(\omega h)^2}{2} - \frac{(\omega h)^4}{24}$. Atunci,

$$\begin{aligned} x^4 &\leq \left(\frac{(\omega h)^2}{2} + \left| -\frac{(\omega h)^4}{24} \right| \right)^4 \leq \left(2 \max \left\{ \frac{(\omega h)^2}{2}, \frac{(\omega h)^4}{24} \right\} \right)^4 \\ &= (\omega h)^8 \cdot \left(2 \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{(\omega h)^2}{24} \right\} \right)^4 \\ &\simeq 0. \end{aligned}$$

Astfel,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3, \quad x^4 \simeq 0.$$

Vezi [14, pag. 741].

Sunt valabile *estimările* care urmează ale puterilor lui x :

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\omega h)^4}{4} - \frac{(\omega h)^6}{24} + \frac{(\omega h)^8}{576} \\ &= \frac{(\omega h)^4}{4} - \frac{(\omega h)^6}{24}, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} x^3 &= \frac{(\omega h)^6}{8} - 3 \frac{(\omega h)^8}{96} + 3 \frac{(\omega h)^{10}}{1152} - \frac{(\omega h)^{12}}{13824} \\ &= \frac{(\omega h)^6}{8}, \end{aligned}$$

de unde

$$1 + x + x^2 + x^3 = 1 + \frac{(\omega h)^2}{2} + 5 \frac{(\omega h)^4}{24} + \frac{(\omega h)^6}{12}.$$

Apoi,

$$\begin{aligned} \frac{\omega\beta}{\alpha} &= \left[\omega h - \frac{(\omega h)^3}{6} \right] \cdot \left[1 + \frac{(\omega h)^2}{2} + 5 \frac{(\omega h)^4}{24} + \frac{(\omega h)^6}{12} \right] \\ &= \omega h + \frac{(\omega h)^3}{3} + \frac{(\omega h)^5}{8} + 7 \frac{(\omega h)^7}{144} - \frac{(\omega h)^9}{72}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Lema 3.5. *Are loc aproximarea*

$$\theta = \omega h - \frac{(\omega h)^5}{120}.$$

Demonstrație. Introducem mărimea $x = x(h) := \omega h + \frac{(\omega h)^3}{3} + \frac{(\omega h)^5}{8}$.

Facem observația că

$$(\omega h)^{7-k} \cdot \left[\frac{(\omega h)^3}{3} + \frac{(\omega h)^5}{8} \right]^k = (\omega h)^{7+2k} \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right]^k, \quad k \in \overline{0,7},$$

pe baza căreia avem — deoarece $x^7 = \sum_{k=0}^7 C_n^k \cdot (\omega h)^{7-k} \left[\frac{(\omega h)^3}{3} + \frac{(\omega h)^5}{8} \right]^k$ —

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}, \quad x^7 \simeq 0.$$

Vezi [14, pag. 749].

Au loc *estimările* următoare ale puterilor lui $\frac{\omega\beta}{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega\beta}{\alpha} \right)^3 &= \left\{ \omega h + (\omega h)^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right] \right\}^3 \\ &= (\omega h)^3 + 3(\omega h)^2 \left\{ (\omega h)^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right] \right\} \\ &\quad + 3(\omega h) \left\{ (\omega h)^6 \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right]^2 \right\} + (\omega h)^9 \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right]^3 \\ &= (\omega h)^3 + (\omega h)^5 + (\omega h)^7 \left\{ \frac{3}{8} + 3 \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right]^2 \right\} \\ &\quad + (\omega h)^9 \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right]^3 \\ &= (\omega h)^3 + (\omega h)^5, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega\beta}{\alpha} \right)^5 &= \left\{ \omega h + (\omega h)^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right] \right\}^5 \\ &= (\omega h)^5 + \sum_{k=1}^5 C_5^k (\omega h)^{5-k} \cdot (\omega h)^{3k} \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right]^k \\ &= (\omega h)^5 + \sum_{k=1}^5 C_5^k \cdot (\omega h)^7 \cdot (\omega h)^{2(k-1)} \left[\frac{1}{3} + \frac{(\omega h)^2}{8} \right]^k \end{aligned}$$

$$= (\omega h)^5.$$

Așadar,

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} &= \left[\omega h + \frac{(\omega h)^3}{3} + \frac{(\omega h)^5}{8} \right] - \frac{1}{3} \left[(\omega h)^3 + (\omega h)^5 \right] + \frac{1}{5} (\omega h)^5 \\ &= \omega h - \frac{(\omega h)^5}{120}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Teorema 3.1. (Aprecierea erorii globale) *Sunt valabile estimările:*

$$\begin{cases} |\cos(n\omega h) - S_1(h, n)| \leq \frac{n}{120}(1 + \omega h)(\omega h)^5 = o(h^4), \\ \left| \frac{\sin(n\omega h)}{\omega} - S_2(h, n) \right| \leq \frac{n}{120} \frac{1 + \omega h}{\omega} (\omega h)^5 = o(h^4) \end{cases}$$

când $h \searrow 0$.

Demonstrație. Avem egalitățile

$$\begin{aligned} \cos(n\omega h) - S_1 &= \cos(n\omega h) - \left[1 - \frac{n}{144}(\omega h)^6 \right] \cdot \cos \left(n \cdot \left[\omega h - \frac{(\omega h)^5}{120} \right] \right) \\ &= \left[\cos(n\omega h) - \cos \left(n\omega h - n \frac{(\omega h)^5}{120} \right) \right] \\ &\quad + \frac{n}{144}(\omega h)^6 \cos \left(n\omega h - n \frac{(\omega h)^5}{120} \right) \\ &= -\sin(\xi_n) \cdot n \frac{(\omega h)^5}{120} + \frac{n}{144}(\omega h)^6 \cos \left(n\omega h - n \frac{(\omega h)^5}{120} \right). \end{aligned}$$

Am aplicat *teorema valorii intermediare*: $\xi_n \in \left[n\omega h - n \frac{(\omega h)^5}{120}, n\omega h \right]$.

De unde,

$$\begin{aligned} |\cos(n\omega h) - S_1| &\leq |-\sin(\xi_n)| \cdot n \frac{(\omega h)^5}{120} + \left| \cos \left(n\omega h - n \frac{(\omega h)^5}{120} \right) \right| \cdot n \frac{(\omega h)^6}{144} \\ &\leq n(\omega h)^5 \left(\frac{1}{120} + \frac{\omega h}{144} \right) \\ &\leq n(\omega h)^5 \frac{1 + \omega h}{120}. \end{aligned}$$

Mai departe, în același mod,

$$\frac{\sin(n\omega h)}{\omega} - S_2 = \frac{1}{\omega} \left[\sin(n\omega h) - \sin \left(n\omega h - n \frac{(\omega h)^5}{120} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{n}{144} (\omega h)^6 \sin \left(n\omega h - n \frac{(\omega h)^5}{120} \right) \\
& = \cos(\zeta_n) \cdot \frac{n}{\omega} \cdot \frac{(\omega h)^5}{120} + \frac{n}{\omega} \cdot \frac{(\omega h)^6}{144} \sin \left(n\omega h - n \frac{(\omega h)^5}{120} \right),
\end{aligned}$$

unde $\zeta_n \in \left[n\omega h - n \frac{(\omega h)^5}{120}, n\omega h \right]$, respectiv

$$\left| \frac{\sin(n\omega h)}{\omega} - S_2 \right| \leq \frac{n}{\omega} (\omega h)^5 \left(\frac{1}{120} + \frac{\omega h}{144} \right).$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Pentru a *explicita* estimarea (3.5), considerăm că

$$(2^{-52} \simeq) \quad 2.22 \times 10^{-16} \equiv 0.$$

Vezi [3, pag. 30].

Fie $\omega = 1$ și $h = 0.001$. Atunci,

$$\omega h = 10^{-3} < 10^{-\frac{16}{7}} < \left(2.2 \times 10^{-16} \right)^{\frac{1}{7}}.$$

Fie $n = 7080$. Este îndeplinită restricția explicită (3.6):

$$(\omega h)^6 = 10^{-18} < 0.02 < \frac{144}{7080} = \min \left\{ 8, \frac{144}{7080} \right\}.$$

Avem eroarea globală

$$\begin{aligned}
\frac{n}{120} (1 + \omega h) (\omega h)^5 &= 59 \cdot (1 + 10^{-3}) \cdot 10^{-15} \\
&< 10^2 \cdot 10^{-15} \\
&= 10^{-13},
\end{aligned}$$

deci mărimile $\cos(k\omega h)$ și $S_1(h, k)$ — unde $k \in \overline{0, n}$ — coincid teoretic în primele doisprezece zecimale. Aceeași concluzie are loc și pentru mărimile $\sin(k\omega h) \simeq \omega S_2(h, k)$.

Pentru a capta *caracterul periodic* al soluției generale, introducem cea de-a doua restricție explicită privind cantitățile h, n :

$$\omega h \geq \frac{7}{n}. \quad (3.7)$$

Astfel, $nh > \frac{6.4}{\omega} > \frac{2\pi}{\omega}$ — *perioada principală* a soluțiilor —

Plecând de la remarcă următoare:

$$4^5 = 1024 > 817.01 > \frac{117649}{144} = \frac{7^6}{144},$$

deducem că

$$\frac{144}{m} > \left(\frac{7}{m}\right)^6, \quad m \geq 4,$$

ceea ce ne permite tripla restricție

$$\min\left\{8, \frac{144}{n}\right\} = \frac{144}{n} \geq (\omega h)^6 \geq \left(\frac{7}{n}\right)^6,$$

unde $n \geq 18$.

Capitolul 4

Realizarea ilustrațiilor

4.1 Un script Python

Lucrăm în sistemul de operare Microsoft *Windows 11* (versiunea 25H2). Aici, instalăm [17] în mod *global* setul de aplicații care constituie implementarea oficială a limbajului de programare de uz general *Python*¹.

După instalare, dintr-un *terminal* — pe care îl deschidem cu combinația de taste Win+X, I —, determinăm *versiunea* Python-ului:

```
[Windows PowerShell]
1 python --version
```

Este recomandat să folosim cea mai nouă versiune: la momentul scrierii acestui material, 3.14.3.

Apoi, instalăm [15] componentele bibliotecii de calcul numeric *NumPy*:

```
[Windows PowerShell]
1 pip install numpy
```

De asemeni, determinăm versiunea NumPy-ului:

```
[Windows PowerShell]
1 python
2 import numpy as np
3 print (np.__version__)
```

La momentul scrierii acestui material, ultima versiune este 2.4.2.

Prima instrucțiune din programul anterior produce lansarea, în același terminal, a *interpretorului* de Python. Acest fapt este vizibil datorită apariției *promptului* principal >>> al interpretorului. Astfel, vom scrie instrucțiunile 2 și 3 *la dreapta* promptului².

¹ O introducere, în românește, în *programarea în Python* este disponibilă *online* [16].

² Pentru a încheia interacțiunea cu interpretorul, fără a închide terminalul, este suficient să tastăm instrucțiunea `quit`; urmată, desigur, de apăsarea tastei `Enter`.

Program:> Interpretorul de Python funcționează după cum bănuim: *citește, înțelege* și apoi *execută* instrucțiunile pe care i le transmitem sub forma unui fișier-text. De aceea, în *editorul de text* obișnuit³, transcriem următorul *script* Python. Îl vom salva ca fișier-text, însă cu extensia `py` [5]:

```
[sisteme_2x2.py]
1 import numpy as np
2
3 # Matricea A se introduce sub forma [a, b, c, d]:
4 ma = np.array([0, 1, -2, -3], dtype=float).reshape(2, 2)
5
6 # Data impusa se introduce sub forma [x0, y0]:
7 dc = np.array([-1.78, 3.56], dtype=float)
8
9 h = 0.001
10 n = 16_100
11
12 f = lambda v1, v2, v3: ma[0, 0] * v1 + ma[0, 1] * v2
13 g = lambda v1, v2, v3: ma[1, 0] * v1 + ma[1, 1] * v2
14
15 r2 = range(n)
16 r3 = range(n + 1)
17
18 x = np.array(r3, dtype=float)
19 y = np.array(r3, dtype=float)
20 t = np.array(r3, dtype=float)
21
22 kx1 = np.array(r2, dtype=float)
23 ky1 = np.array(r2, dtype=float)
24 zx1 = np.array(r2, dtype=float)
25 zy1 = np.array(r2, dtype=float)
26
27 kx2 = np.array(r2, dtype=float)
28 ky2 = np.array(r2, dtype=float)
29 zx2 = np.array(r2, dtype=float)
30 zy2 = np.array(r2, dtype=float)
31
32 kx3 = np.array(r2, dtype=float)
33 ky3 = np.array(r2, dtype=float)
34 zx3 = np.array(r2, dtype=float)
35 zy3 = np.array(r2, dtype=float)
36
37 kx4 = np.array(r2, dtype=float)
38 ky4 = np.array(r2, dtype=float)
39
40 kxRK4 = np.array(r2, dtype=float)
41 kyRK4 = np.array(r2, dtype=float)
42
43 x[0] = dc[0]
44 y[0] = dc[1]
```

³ Folosind tastele Win+R, producem apariția unei *casete de comenzi*. Scriem, în aceasta, comanda `notepad.exe`, după care apăsăm butonul OK.

```

45 t[0] = 0
46
47 h2 = 0.5 * h
48 h3 = h / 6
49
50 textul = ""
51
52 for i in r2:
53     i2 = i + 1
54     ti = t[i]
55     ti2 = ti + h2
56     ti3 = ti + h
57
58     t[i2] = ti3
59
60     kx1[i] = f(x[i], y[i], ti)
61     ky1[i] = g(x[i], y[i], ti)
62     zx1[i] = x[i] + h2 * kx1[i]
63     zy1[i] = y[i] + h2 * ky1[i]
64
65     kx2[i] = f(zx1[i], zy1[i], ti2)
66     ky2[i] = g(zx1[i], zy1[i], ti2)
67     zx2[i] = x[i] + h2 * kx2[i]
68     zy2[i] = y[i] + h2 * ky2[i]
69
70     kx3[i] = f(zx2[i], zy2[i], ti2)
71     ky3[i] = g(zx2[i], zy2[i], ti2)
72     zx3[i] = x[i] + h * kx3[i]
73     zy3[i] = y[i] + h * ky3[i]
74
75     kx4[i] = f(zx3[i], zy3[i], ti3)
76     ky4[i] = g(zx3[i], zy3[i], ti3)
77
78     kxRK4[i] = h3 * (kx1[i] + 2 * kx2[i] + 2 * kx3[i] + kx4[i])
79     kyRK4[i] = h3 * (ky1[i] + 2 * ky2[i] + 2 * ky3[i] + ky4[i])
80
81     x[i2] = x[i] + kxRK4[i]
82     y[i2] = y[i] + kyRK4[i]
83
84     # Transformari ale rezultatului pentru afisare:
85     # scal(are), - (reflexie), trans(latie)
86     scal = 10
87     scal_xi2 = scal * x[i2]
88     scal_yi2 = scal * y[i2]
89
90     axe_yi2 = - scal_yi2
91
92     trans = 50
93     prep_xi2 = scal_xi2 + trans
94     prep_yi2 = axe_yi2 + trans
95
96     textul += "{0:.6f} {1:.6f}\n".format(prepare_xi2, prep_yi2)
97
98 f = open("rezultatul.txt", "a")

```

```

99 f.write(textul)
100 f.flush()
101 f.close()

```

Îi cerem interpretorului să execute acest script cu comanda:

```

[Windows PowerShell]
i python sisteme_2x2.py

```

Datele calculate vor fi introduse în fișierul nou creat — în mod automat! — rezultatul.txt.

Pentru a construi *portretul fazelor* unei ecuații diferențiale ordinare, liniare și omogene, de ordinul al doilea, procedăm astfel: mai întâi, calculăm mărimile relevante pe baza matricei sistemului diferențial de ordinul întâi echivalent ecuației:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\begin{aligned} \text{trace} &= -3, \quad \text{det} = 2, \\ \lambda_1 &= -2, \quad \lambda_2 = -1. \end{aligned}$$

Remarcăm că planul fazelor se împarte în *patru sectoare*, delimitate de drepte $y - \lambda_i \cdot x = 0$, unde $i \in \{1, 2\}$.

Apoi, pentru a surprinde *trăsăturile specifice* ale orbitelor, alegem *datele impuse* pentru câte două orbite din fiecare sector și câte două orbite de pe fiecare dreaptă: în total, avem de construit doisprezece orbite, ale căror date impuse vor fi introduse în ordinea prezentată în Figura 4.1. Din rațiuni estetice, datele impuse le corespund unor puncte situate la distanțe *aproximativ egale* de centrul axelor de coordonate. Astfel, am folosit ca *ghidaj* la calculul coordonatelor carteziene ale acestor puncte cercul $\mathcal{C}(O, 4)$. Valorile numerice stabilite, din tabelul care urmează, pot fi inserate în scriptul Python drept *comentarii*.

```

# +-----+-----+-----+-----+
# |Nr. | Data impusa | Pasul | Numarul de iteratii |
# |    | x0, y0      | h     | n                    |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 01 | 1, 3.87     | 0.001 | 16_100              |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 02 | 3, 2.64     | 0.001 | 16_100              |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 03 | 2.82, -2.82 | 0.001 | 16_100              |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 04 | 2.5, -3.12  | 0.001 | 16_100              |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 05 | 2, -3.46    | 0.001 | 16_100              |
# +-----+-----+-----+-----+

```

```

# | 06 | 1.78, -3.56 | 0.001 | 16_100 |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 07 | -1, -3.87 | 0.001 | 16_100 |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 08 | -3, -2.64 | 0.001 | 16_100 |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 09 | -2.82, 2.82 | 0.001 | 16_100 |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 10 | -2.5, 3.12 | 0.001 | 16_100 |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 11 | -2, 3.46 | 0.001 | 16_100 |
# +-----+-----+-----+-----+
# | 12 | -1.78, 3.56 | 0.001 | 16_100 |
# +-----+-----+-----+-----+

```

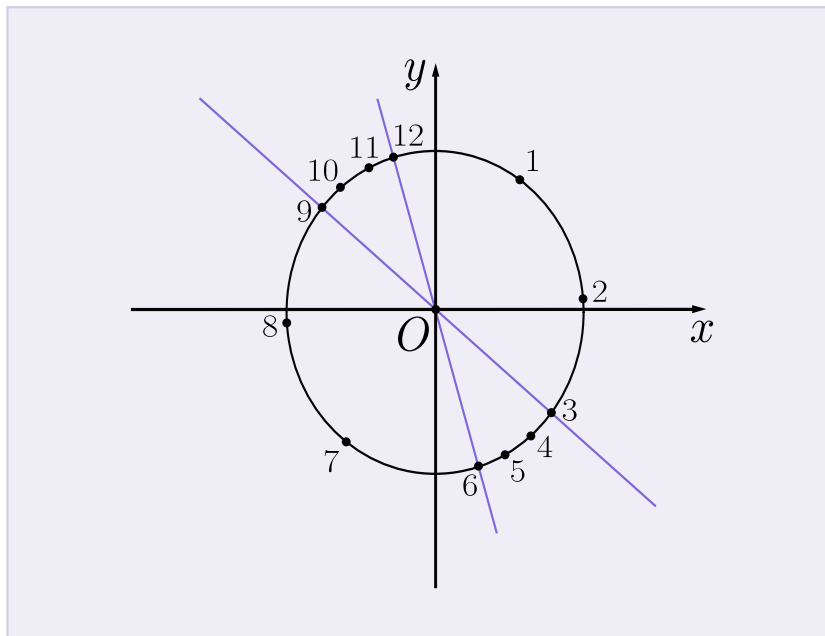


Fig. 4.1 Cercul *datelor impuse* pentru calculul portretului fazelor.

O practică încetățenită este alegerea de date impuse corespunzând unor puncte așezate *simetric* față de centrul axelor de coordonate — de exemplu, datele de la Nr. 02 și 08 —. Din acest motiv, curbele obținute vor apărea ca fiind poziționate una în continuarea celeilalte: în particular, dreptele din Figura 4.2 nu sunt rezultate din calculul numeric, *aparența* lor fiind produsă de câte două semidrepte [2, pag. 160].

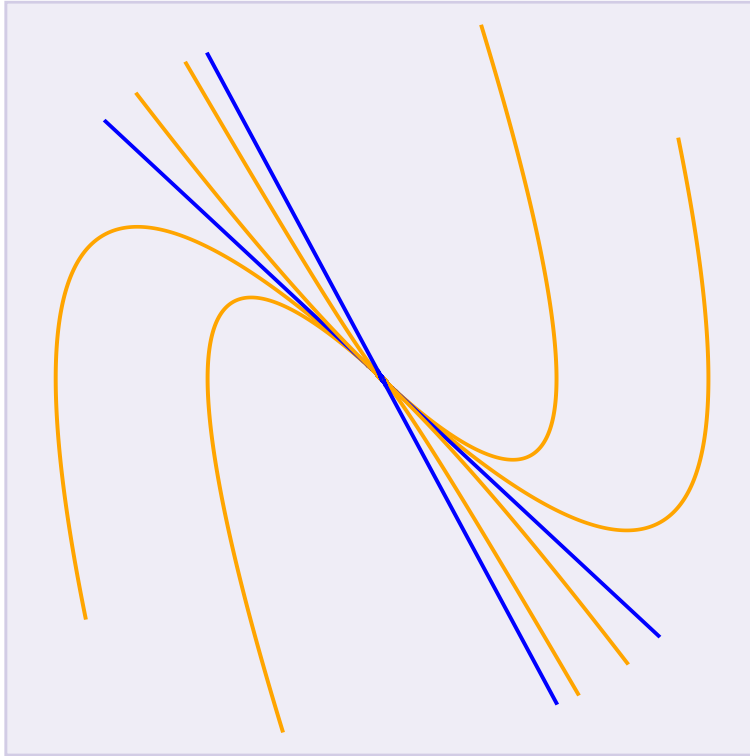


Fig. 4.2 Portretul fazelor (incomplet) pentru ecuația diferențială $x'' + 3x' + 2x = 0$.

4.2 Un fișier SVG

Pentru ca datele să poată fi vizualizate atât pe foaia de hârtie cât și într-o pagină *web*, ele trebuie transformate mai întâi în *obiecte grafice* bidimensionale [22].

Lucrăm în *browserul web* Mozilla *Firefox* [7]. Aici, instrucțiunile de grafică vectorială⁴ pot fi puse la treabă pe *bancul de probă* [6].

Tot în editorul de text obișnuit, transcriem următorul *schelet* de script SVG. Îl vom salva ca fișier-text, dar cu extensia *svg*.

```
[ilustratia.svg]
1 <svg
2   viewBox="0 0 100 100"
3   xmlns="http://www.w3.org/2000/svg">
4
5 <polyline
6   points="
```

⁴ O introducere în *programarea în SVG* este disponibilă *online* [20].

```

7
8 "
9 stroke="orange"
10 fill="none"
11 stroke-width="0.4"
12 />
13
14 </svg>

```

Spațiul gol de la linia de cod 7 va fi înlocuit cu *întreg conținutul* fișierului rezultatul.txt. Astfel, după obținerea valorilor numerice ale celor doisprezece curbe necesare portretului din Figura 4.2, avem:

```

[ilustratia.svg]
1 <svg
2 viewBox="0 0 100 100"
3 xmlns="http://www.w3.org/2000/svg">
4
5 <polyline
6 points="
7 60.038632 11.435935
8 60.077128 11.571539
9 60.115489 11.706814
10
11 [multe linii de numere]
12
13 50.000006 50.000006
14 50.000006 50.000006
15 50.000006 50.000006
16 "
17 stroke="orange"
18 fill="none"
19 stroke-width="0.4"
20 />
21
22 <polyline
23 points="
24 80.026330 23.739018
25 80.052522 23.877671
26 80.078575 24.015962
27
28 [multe linii de numere]
29
30 50.000009 50.000009
31 50.000009 50.000009
32 50.000009 50.000009
33 "
34 stroke="orange"
35 fill="none"
36 stroke-width="0.4"
37 />
38
39 [alte obiecte grafice]
40

```

```

41 <polyline
42 points="
43 32.235564 14.471129
44 32.271058 14.542116
45 32.306480 14.612960
46
47 [multe linii de numere]
48
49 50.000000 50.000000
50 50.000000 50.000000
51 50.000000 50.000000
52 "
53 stroke="blue"
54 fill="none"
55 stroke-width="0.4"
56 />
57
58 </svg>

```

Obiectele grafice `polyline` [21], definite în fișier, sunt *liniile poligonale* cu care realizăm interpolarea liniară a datelor calculate. Cu atributul [19] `stroke` stabilim *culoarea* liniei poligonale iar cu `stroke-width` *grosimea* acesteia.

Mai trebuie adăugate: sistemul de coordonate carteziene *Oxy*, respectiv *săgețile* care indică *sensul de deplasare* pe fiecare din curbe. Pentru rapiditate, putem întrebuința editorul de grafică vectorială *Inkscape* [10]. El va *înțelege* obiectele grafice din fișierul `ilustratia.svg` și va putea să le modifice, respectiv să le separe.

4.3 Ilustrații 3D

Graficul unei soluții oarecare a sistemului diferențial (1.1), adică mulțimea

$$G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left\{ \left(t, \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,$$

poate fi socotit drept o submulțime a *spațiului euclidian real* în trei dimensiuni:

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Pentru a putea *desena* pe foaia de hârtie mulțimea \mathcal{G} trebuie să realizăm o corespondență *mai-mulți-la-unu* între \mathbb{R}^3 și \mathbb{R}^2 care să ne permită *trecerea practică* de la reperul *Oxyt* la un reper bidimensional, *OXY*.

Lema 4.1. *Fie paralelogramul ABCD din Figura 4.3, cu lungimile laturilor AB = x și AD = t. Fie G piciorul perpendicularei duse din vârful C pe dreapta AF. Se cunosc măsurile unghiurilor $\angle DAF = \alpha$ și $\angle FAB = \beta$. Aici, $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$.*

Lema 4.2. În Figura 4.4, paralelogramele $ABCD$ și $VNMW$ au laturile egale și paralele două câte două: $AD \parallel VW$ și $AB \parallel VN$. De asemenea, dreptele VA, WD, MC și NB sunt paralele între ele. Dacă dreptele OV și OF sunt perpendiculare una pe cealaltă, atunci avem relațiile⁵:

$$\begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\sin \alpha & \sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_M \\ x_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_M \end{pmatrix}.$$

Aici, $X_M := AG$, $Y_M := MG$, $x_M := AB$, $y_M := AV$, $t_M := AD$. La fel,

$$\begin{pmatrix} X_N \\ Y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \beta \\ 0 & \sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_M \end{pmatrix},$$

unde $X_N := AK$, $Y_N := NK$, $x_N = x_M$, $y_N = y_M$.

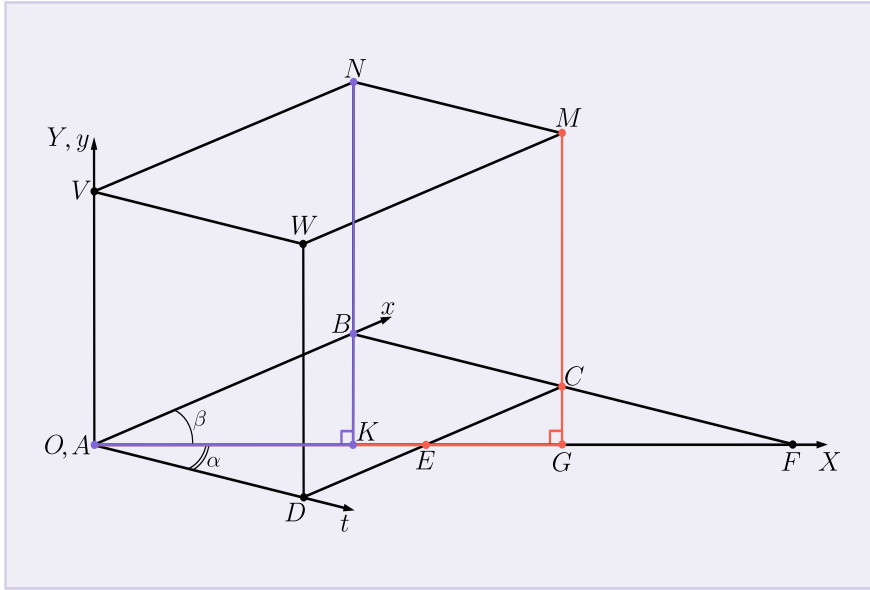


Fig. 4.4 Corespondențele dintre reperul cartezian *imaginar* $Oxyt$ și cel *adevărat* OXY : punctul $M(OB, OV, OD) \equiv M(OG, GM)$ din spațiul trei-dimensional și proiecția sa în planul fazelor $N(OA, ON, 0) \equiv N(OK, KN)$.

⁵ Remarcăm că determinantul matricei este $\sin(\alpha + \beta) > 0$. Astfel, pentru orice punct M din planul foii de hârtie, dreapta de ecuații [23, pag. 195]

$$x - x_M = -\frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot (y - y_M), \quad t - t_M = \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot (y - y_M),$$

din \mathbb{R}^3 , va fi văzută sub forma unui punct, și anume M .

Demonstrație. Sunt valabile egalitățile $Y_M = MG = CG + CM = CG + OV = CG + y_M$. Aici, punctul K joacă rolul punctului J din Figura 4.3. Astfel, $BK = x_M \sin \beta = x_N \sin \beta$ și $Y_N = KN = BK + y_M = BK + y_N$.

Justificarea s-a încheiat. \square

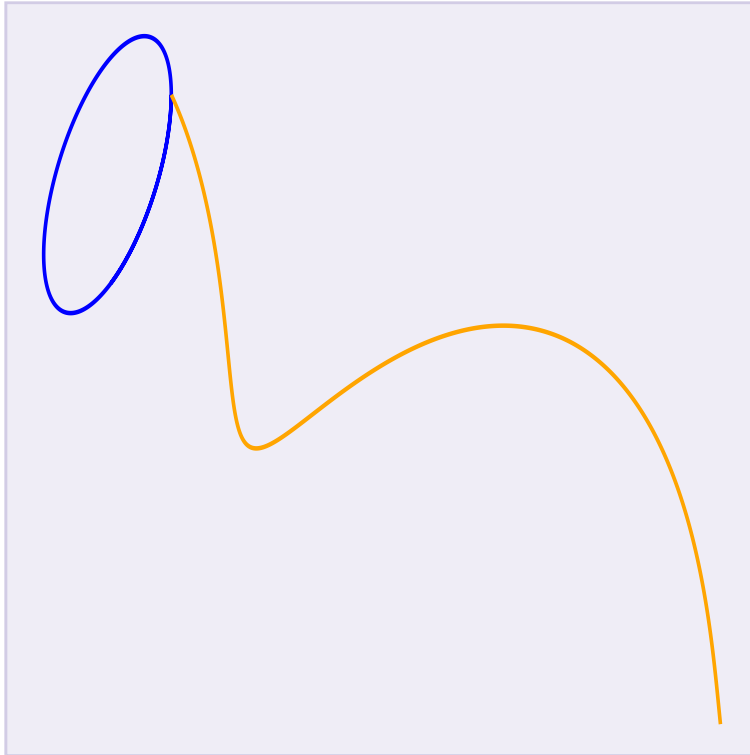


Fig. 4.5 Graficul (în portocaliu) și proiecția (în albastru a) acestuia (incomplete) pe planul fazelor pentru soluția (x, x') , a sistemului 2×2 echivalent ecuației diferențiale $x'' + x = 0$, cu data impusă $x(0) = 1, x'(0) = 0$. Soluția a fost calculată pentru $t \in [0, 7.8]$ ca să se evidențieze *periodicitatea*.

Program:> Modificăm scriptul Python pentru a genera curbele parcurse în spațiul trei-dimensional, respectiv în planul fazelor, de către punctele M și N . Rezultatele corespunzătoare vor fi salvate în fișierele nou-create `rezultatul_3D.txt` — pentru M —, respectiv `rezultatul_3D_PF.txt`.

```
[sisteme_2x2_3D.py]
1 import numpy as np
2 import math as mt
3
4 # Calcule pentru 3D:
5 #
```

```

6 # Notatii:
7 # pi: p, alpha: a, beta: b
8 # cos_alpha: ca, cos_beta: cb, sin_alpha: sa, sin_beta: sb
9 #
10 # Restrictii:
11 # 0 < alpha, beta, alpha + beta < pi/2
12 p = mt.pi
13 a = p/6
14 b = p/4
15 ca = mt.cos(a)
16 sa = mt.sin(a)
17 cb = mt.cos(b)
18 sb = mt.sin(b)
19
20 ma = np.array([0, 1, -1, 0], dtype=float).reshape(2,2)
21 dc = np.array([1, 0], dtype=float)
22
23 h = 0.001
24 n = 7_800
25
26 f = lambda v1, v2, v3: ma[0, 0] * v1 + ma[0, 1] * v2
27 g = lambda v1, v2, v3: ma[1, 0] * v1 + ma[1, 1] * v2
28
29 r2 = range(n)
30 r3 = range(n + 1)
31
32 x = np.array(r3, dtype=float)
33 y = np.array(r3, dtype=float)
34 t = np.array(r3, dtype=float)
35
36 kx1 = np.array(r2, dtype=float)
37 ky1 = np.array(r2, dtype=float)
38 zx1 = np.array(r2, dtype=float)
39 zy1 = np.array(r2, dtype=float)
40
41 kx2 = np.array(r2, dtype=float)
42 ky2 = np.array(r2, dtype=float)
43 zx2 = np.array(r2, dtype=float)
44 zy2 = np.array(r2, dtype=float)
45
46 kx3 = np.array(r2, dtype=float)
47 ky3 = np.array(r2, dtype=float)
48 zx3 = np.array(r2, dtype=float)
49 zy3 = np.array(r2, dtype=float)
50
51 kx4 = np.array(r2, dtype=float)
52 ky4 = np.array(r2, dtype=float)
53
54 kxRK4 = np.array(r2, dtype=float)
55 kyRK4 = np.array(r2, dtype=float)
56
57 x[0] = dc[0]
58 y[0] = dc[1]
59 t[0] = 0

```

```

60
61 h2 = 0.5 * h
62 h3 = h / 6
63
64 textul = ""
65
66 for i in r2:
67     i2 = i + 1
68     ti = t[i]
69     ti2 = ti + h2
70     ti3 = ti + h
71
72     t[i2] = ti3
73
74
75     kx1[i] = f(x[i], y[i], ti)
76     ky1[i] = g(x[i], y[i], ti)
77     zx1[i] = x[i] + h2 * kx1[i]
78     zy1[i] = y[i] + h2 * ky1[i]
79
80     kx2[i] = f(zx1[i], zy1[i], ti2)
81     ky2[i] = g(zx1[i], zy1[i], ti2)
82     zx2[i] = x[i] + h2 * kx2[i]
83     zy2[i] = y[i] + h2 * ky2[i]
84
85     kx3[i] = f(zx2[i], zy2[i], ti2)
86     ky3[i] = g(zx2[i], zy2[i], ti2)
87     zx3[i] = x[i] + h * kx3[i]
88     zy3[i] = y[i] + h * ky3[i]
89
90     kx4[i] = f(zx3[i], zy3[i], ti3)
91     ky4[i] = g(zx3[i], zy3[i], ti3)
92
93     kxRK4[i] = h3 * (kx1[i] + 2 * kx2[i] + 2 * kx3[i] + kx4[i])
94     kyRK4[i] = h3 * (ky1[i] + 2 * ky2[i] + 2 * ky3[i] + ky4[i])
95
96     x[i2] = x[i] + kxRK4[i]
97     y[i2] = y[i] + kyRK4[i]
98
99     # Trecerea de la Oxyt la OXY:
100    #
101    # Punctul M de pe graficul solutiei (x,y):
102    xi2_3D = t[i2] * ca + x[i2] * cb
103    yi2_3D = y[i2] + x[i2] * sb - t[i2] * sa
104
105    # Punctul N din planul fazelor (PF, Oxy)
106    # xi2_3D_PF = x[i2] * cb
107    # yi2_3D_PF = y[i2] + x[i2] * sb
108
109    # Scalare:
110    scal = 10
111
112    # Punctul M:
113    scal_xi2_3D = scal * xi2_3D

```

```

114 scal_yi2_3D = scal * yi2_3D
115
116 # Punctul N:
117 # scal_xi2_3D_PF = scal * xi2_3D_PF
118 # scal_yi2_3D_PF = scal * yi2_3D_PF
119
120 # Modificarea axelor (reflexie):
121
122 # Punctul M:
123 axe_yi2_3D = - scal_yi2_3D
124
125 # Punctul N:
126 # axe_yi2_3D_PF = - scal_yi2_3D_PF
127
128 # Translatie:
129 trans = 50
130
131 # Punctul M:
132 prep_xi2_3D = scal_xi2_3D + trans
133 prep_yi2_3D = axe_yi2_3D + trans
134
135 # Punctul N:
136 # prep_xi2_3D_PF = scal_xi2_3D_PF + trans
137 # prep_yi2_3D_PF = axe_yi2_3D_PF + trans
138
139 # Punctul M:
140 textul += "{0:.6f} {1:.6f}\n".format (prep_xi2_3D, \
(cont.) prep_yi2_3D)
141
142 # Punctul N:
143 # textul += "{0:.6f} {1:.6f}\n".format (prep_xi2_3D_PF, \
(cont.) prep_yi2_3D_PF)
144
145 # 3D (curba punctului M):
146 f = open("rezultatul_3D.txt", "a")
147
148 # 3D_PF (curba punctului N):
149 # f = open("rezultatul_3D_PF.txt", "a")
150
151 f.write (textul)
152 f.flush ()
153 f.close ()

```

Anexa A

Homeomorfismul $(t \in \mathbb{R}) \mapsto \bar{r}(t)$ al orbitelor nemărginite

Ne interesează stabilirea unor *estimări* de forma

$$|t - s| \leq L(t) \cdot |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|, \quad (\text{A.1})$$

atunci când $|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \leq \delta(t)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Cu ajutorul lor, deducem că *inversa* aplicației $t \mapsto \bar{r}(t)$ este *continuă* în raport cu *topologia euclidiană* a dreptei reale și cu topologia *indusă* pe orbita \mathcal{O} de către topologia euclidiană a planului fazelor.

A.1 Cazul *trace* < 0 , *det* > 0 , *discr* < 0

Folosim tehnicile de calcul din Subsecțiunea 2.2.3 ca să ne referim la orbita¹ $\mathcal{O}(C_1, C_2)$, cu $C_1^2 + C_2^2 > 0$.

Lema A.1. (Norma unei matrice) *Fie matricea* $M := \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, *oarecare*, și vectorii

$$\bar{u}^1 := \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \bar{u}^2 := \begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix} \in T\mathbb{R}^2$$

supuși relației

$$\bar{u}^2 = M \cdot \bar{u}^1.$$

Atunci,

$$u^2 \leq \|M\| \cdot u^1, \quad (\text{A.2})$$

¹ Când nu este pericol de confuzie, întrebuițăm notația $\mathcal{O}(C_1, C_2)$ pentru a ne referi la orbita $\mathcal{O}(x, y)$ căreia îi corespund constantele de integrare $C_{1,2}$.

unde mărimea $\|M\| := \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + q^2}$ desemnează norma euclidiană de index doi a matricei M .

Demonstrație. Inegalitatea (A.2) se ridică la pătrat și se reorganizează ca

$$\begin{aligned} (mX + nY)^2 + (pX + qY)^2 &= Z^2 + T^2 \\ &\leq (m^2 + n^2)(X^2 + Y^2) + (p^2 + q^2)(X^2 + Y^2), \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} &\left[(mX + nY)^2 - (m^2 + n^2)(X^2 + Y^2) \right] + \left[(pX + qY)^2 - (p^2 + q^2)(X^2 + Y^2) \right] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Am ajuns la

$$-(mY - nX)^2 - (pY - qX)^2 \leq 0.$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Pentru orice $t \in \mathbb{R}$,

$$\bar{r}(t) = e^{\alpha t} \cdot \bar{R}(t), \quad \bar{R}(t) := \gamma(t) \cdot \bar{w}_1 + \eta(t) \cdot \bar{w}_2,$$

unde mărimile $\gamma, \eta, \bar{w}_1, \bar{w}_2$ au fost precizate în formulele (2.23), (2.24).

Introducem numerele $\mathbf{a} \geq \mathbf{b} > 0$, numite (informal) *semi-axa mare*, respectiv *semi-axa mică* ale acelei (unice) elipse E pe care o determină perechea de raze conjugate $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} \subset T_O \mathbb{R}^2$ [13, pag. 33]. Atunci,

$$\mathbf{a} \geq R(t) \geq \mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R},$$

deoarece *punctul* $N(t)$ din planul fazelor, având raza vectorială $\bar{R}(t)$ în sistemul de referință Oxy , se găsește în permanență pe elipsa E :

$$\mathbf{a} = \max_{t \in \mathbb{R}} d(O, N(t)), \quad \mathbf{b} = \min_{t \in \mathbb{R}} d(O, N(t)).$$

Lema A.2. Fie $t \in \mathbb{R}$, fixat arbitrar, și numărul $\delta = \delta(t)$ restrâns la $0 < \delta(t) \leq \frac{r(t)}{2}$. Fie $s \in \mathbb{R}$ pentru care

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \leq \delta(t).$$

Atunci, există numărul $S = S(t)$ cu proprietatea că

$$|s| \leq S(t). \tag{A.3}$$

Demonstrație. Observăm că $\frac{r(t)}{2} \leq r(s) \leq \frac{3r(t)}{2}$, de unde

$$\frac{\mathbf{b}}{2} \cdot e^{\alpha t} \leq \frac{r(t)}{2} \leq r(s) \leq \mathbf{a} \cdot e^{\alpha s}$$

și

$$\frac{3\mathbf{a}}{2} \cdot e^{\alpha t} \geq \frac{3r(t)}{2} \geq r(s) \geq \mathbf{b} \cdot e^{\alpha s}.$$

Astfel,

$$\frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{a}} e^{\alpha t} \leq e^{\alpha s} \leq \frac{3\mathbf{a}}{2\mathbf{b}} e^{\alpha t}$$

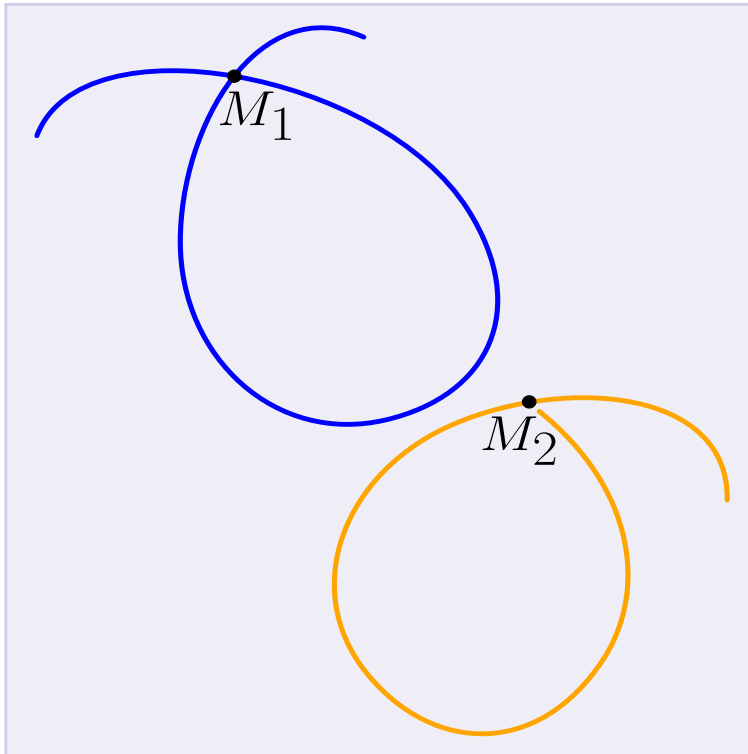
Justificarea s-a încheiat. \square 

Fig. A.1 “Bucle interzise” pentru orbitele *nemărginite*: punctul de autointersecție M_1 nu poate exista datorită *injectivității* parametrizării $t \mapsto \bar{\gamma}(t)$. Punctul $M_2 = M_2(t_0)$ pentru care $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\gamma}(t_n) = \bar{\gamma}(t_0)$, unde șirul $(t_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ satisface una din condițiile $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \pm\infty$, nu poate fi întâlnit aici din cauza *estimării* (A.3). Vezi și [2, pag. 89].

Conform Exercițiului 2.6,

$$e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} = M \cdot \bar{r}(t), \quad M := \frac{1}{C_1^2 + C_2^2} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1^T \\ \bar{U}_2^T \end{pmatrix}.$$

Aplicăm Lema A.1,

$$\begin{aligned} E(t, s) &:= \left| e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} - e^{\alpha s} \begin{pmatrix} \cos \beta s \\ \sin \beta s \end{pmatrix} \right| = |M \cdot [\bar{r}(t) - \bar{r}(s)]| \\ &\leq \|M\| \cdot |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|. \end{aligned}$$

Sunt valabile estimările următoare:

$$\begin{aligned} E(t, s) &= \sqrt{(e^{\alpha t} \cos \beta t - e^{\alpha s} \cos \beta s)^2 + (e^{\alpha t} \sin \beta t - e^{\alpha s} \sin \beta s)^2} \\ &= |(e^{\alpha t} \cos \beta t - e^{\alpha s} \cos \beta s) + i(e^{\alpha t} \sin \beta t - e^{\alpha s} \sin \beta s)| \\ &= |e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) - e^{\alpha s} (\cos \beta s + i \sin \beta s)| \\ &= |e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha+i\beta)s}| = |e^{(\alpha+i\beta)t}| \cdot |1 - e^{(\alpha+i\beta)(s-t)}| \\ &= e^{\alpha t} \cdot \left| [1 - e^{\alpha(s-t)} \cos \beta(s-t)] + i[-e^{\alpha(s-t)} \sin \beta(s-t)] \right| \\ &= e^{\alpha t} \sqrt{1 + e^{2\alpha(s-t)} - 2e^{\alpha(s-t)} \cos \beta(s-t)} \\ &\geq e^{\alpha t} \cdot |1 - e^{\alpha(s-t)}|, \end{aligned}$$

respectiv, *via* teorema valorii intermediare,

$$1 - e^{\alpha(s-t)} = \alpha e^{\alpha \xi} \cdot (t - s), \quad (\text{A.4})$$

unde $\xi = \xi(\alpha) \in [\min\{0, s-t\}, \max\{0, s-t\}]$.

Am ajuns la

$$\|M\| \cdot |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \geq e^{\alpha t} \cdot |\alpha| \cdot e^{-|\alpha| \cdot |\xi|} \cdot |t - s|.$$

Aici, pe baza Lemei A.2,

$$|\xi| \leq |t| + |s| \leq |t| + S(t), \quad (\text{A.5})$$

deci

$$\begin{aligned} |t - s| &\leq \frac{\|M\|}{|\alpha|} \cdot e^{|\alpha|(|t|+S(t))-\alpha t} \cdot |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \\ &\leq \frac{\|M\|}{|\alpha|} \cdot e^{|\alpha|(2|t|+S(t))} \cdot |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|. \end{aligned}$$

În fine,

$$L(t) := \frac{\|M\|}{|\alpha|} e^{|\alpha|(2|t|+s(t))}, \quad \delta(t) \in \left(0, \frac{r(t)}{2}\right], \quad t \in \mathbb{R},$$

iar estimarea (A.1) rămâne valabilă (și) în contextul Subsecțiunii 2.2.4.

A.2 Cazul $\text{trace} < 0$, $\text{det} > 0$, $\text{discr} = 0$

Întrebuițăm detalii din Subsecțiunea 2.2.2 privitoare la orbita $\mathcal{O}(C_1, C_2)$, cu $C_2 \neq 0$.

Reprezentarea lui $\bar{r}(t)$, dată de expresiile (2.15), (2.16), ne conduce la

$$\begin{aligned} [r(t)]^2 &= C_2^2 e^{2\lambda t} \cdot (t\bar{u}_1 + \bar{u}_3)^2 \\ &= C_2^2 e^{2\lambda t} [t^2 u_1^2 + 2(\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2)t + u_3^2] \\ &= C_2^2 e^{2\lambda t} \left[(1 + \lambda^2)t^2 + 2\frac{C_1 + \lambda(C_2 + C_1\lambda)}{C_2}t + \frac{C_1^2 + (C_2 + C_1\lambda)^2}{C_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Deducem că trinomul de gradul al II-lea

$$E(t) := (1 + \lambda^2)t^2 + 2\frac{C_1 + \lambda(C_2 + C_1\lambda)}{C_2}t + \frac{C_1^2 + (C_2 + C_1\lambda)^2}{C_2^2}$$

are discriminantul $\Delta_t = -4$, deci este *minorat* de către cantitatea $\frac{1}{1+\lambda^2}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Așadar,

$$r(t) \geq |C_2| \cdot \frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.6})$$

Lema A.3. Fie $t, s \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \leq \frac{r(t)}{2}.$$

Atunci, se adevăresc estimările

$$\frac{e^{-\lambda s}}{u_1 |s| + u_3} \leq 2\sqrt{1 + \lambda^2} \cdot e^{-\lambda t}$$

și

$$\frac{2}{3\sqrt{1 + \lambda^2}} \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{u_1 |t| + u_3} \leq e^{-\lambda s}.$$

Demonstrație. Ne bazăm pe inegalitatea (A.6), pe

$$\frac{r(t)}{2} \leq r(s) \leq \frac{3r(t)}{2} \quad (\text{A.7})$$

și pe

$$\begin{aligned} r(t) &= |C_2| e^{\lambda t} |t\bar{u}_1 + \bar{u}_3| \\ &\leq |C_2| e^{\lambda t} (|t| \cdot |\bar{u}_1| + |\bar{u}_3|). \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

La fel ca în cadrul Lemei A.2, am probat că *există numărul* $S = S(t)$ *pentru care să fie valabilă estimarea* (A.3).

Au loc egalitățile următoare:

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) - \bar{r}(s) &= C_2 \left[\left(e^{\lambda t} t - e^{\lambda s} s \right) \bar{u}_1 + \left(e^{\lambda t} - e^{\lambda s} \right) \bar{u}_3 \right] \\ &= C_2 e^{\lambda t} \left\{ \left[(t-s) + \left[1 - e^{\lambda(s-t)} \right] s \right] \bar{u}_1 + \left[1 - e^{\lambda(s-t)} \right] \bar{u}_3 \right\}, \end{aligned}$$

respectiv, conform (A.4), unde $\xi = \xi(\lambda)$,

$$\bar{r}(t) - \bar{r}(s) = C_2 e^{\lambda t} \cdot \lambda e^{\lambda \xi} \cdot (t-s) \cdot \left[\left(\frac{1}{\lambda e^{\lambda \xi}} + s \right) \bar{u}_1 + \bar{u}_3 \right], \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Apoi, pe baza estimării (A.5),

$$\begin{aligned} |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| &= |C_2| e^{\lambda t} \cdot |\lambda| e^{\lambda \xi} \cdot |t-s| \cdot \sqrt{E \left(s + \frac{1}{\lambda e^{\lambda \xi}} \right)} \\ &\geq |C_2| e^{-|\lambda| \cdot |t|} \cdot |\lambda| e^{-|\lambda| \cdot |\xi|} \cdot |t-s| \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \end{aligned}$$

și, în sfârșit,

$$L(t) = \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{|\lambda C_2|} e^{|\lambda|(2|t| + S(t))}, \quad \delta(t) \in \left(0, \frac{r(t)}{2} \right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Estimarea (A.1) rămâne valabilă atunci când (**trace** > 0, **det** > 0, **discr** = 0).

A.3 Cazul **trace** < 0, **det** > 0, **discr** > 0

Revenim la contextul Subsecțiunii 2.2.1 vizavi de orbita $\mathcal{O}(C_1, C_2)$, cu $C_1 \cdot C_2 \neq 0$.

Stabilim că trinomul de gradul al II-lea

$$F(q) := (q \cdot \bar{u}_1 + \bar{u}_2)^2, \quad q \in \mathbb{R},$$

are discriminantul $\Delta_q = -4(\lambda_1 - \lambda_2)^2$, deci

$$F(q) \geq \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{1 + \lambda_1^2}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Dată fiind generalitatea formulelor, un raționament *verbatim* ne va conduce la

$$|\bar{u}_1 + q \cdot \bar{u}_2| \geq \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\sqrt{1 + \lambda_2^2}}, \quad q \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.8})$$

Sunt valabile inegalitățile următoare:

$$r(t) = |C_2| \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \left| \frac{C_1}{C_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \cdot \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \right| \geq |C_2| \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}$$

și

$$r(t) = |C_1| \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \left| \bar{u}_1 + \frac{C_2}{C_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \cdot \bar{u}_2 \right| \geq |C_1| \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\sqrt{1 + \lambda_2^2}},$$

respectiv

$$r(t) \geq |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \min \left\{ \frac{|C_2|}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}, \frac{|C_1|}{\sqrt{1 + \lambda_2^2}} \right\} \cdot e^{\lambda_2 t}$$

și

$$r(t) \geq |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \min \left\{ \frac{|C_2|}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}, \frac{|C_1|}{\sqrt{1 + \lambda_2^2}} \right\} \cdot e^{\lambda_1 t}.$$

Am ajuns la

$$r(t) \geq |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot C_{\min} \cdot \max \{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.9})$$

unde

$$C_{\min} := \min \left\{ \frac{|C_2|}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}, \frac{|C_1|}{\sqrt{1 + \lambda_2^2}} \right\}.$$

Apoi,

$$\begin{aligned}
r(t) &\leq |C_1| \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot u_1 + |C_2| \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot u_2 = u_1 u_2 \left(\frac{|C_1| e^{\lambda_1 t}}{u_2} + \frac{|C_2| e^{\lambda_2 t}}{u_1} \right) \\
&\leq 2u_1 u_2 \cdot \max \left\{ \frac{|C_1| e^{\lambda_1 t}}{u_2}, \frac{|C_2| e^{\lambda_2 t}}{u_1} \right\} \\
&\leq 2u_1 u_2 \cdot C_{\max} \cdot \max \left\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \right\}, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{A.10}$$

unde

$$C_{\max} := \max \left\{ \frac{|C_2|}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}, \frac{|C_1|}{\sqrt{1 + \lambda_2^2}} \right\}.$$

Lema A.4. Fie $t, s \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \leq \frac{r(t)}{2}.$$

Atunci, se adevăresc estimările

$$\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\sqrt{(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2)}} \cdot \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \cdot \max \left\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \right\} \leq \max \left\{ e^{\lambda_1 s}, e^{\lambda_2 s} \right\}$$

și

$$\max \left\{ e^{\lambda_1 s}, e^{\lambda_2 s} \right\} \leq \frac{3\sqrt{(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2)}}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \cdot \frac{C_{\max}}{C_{\min}} \cdot \max \left\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \right\}.$$

Demonstrație. Folosim inegalitățile (A.9), (A.10) și (A.7).

Justificarea s-a încheiat. \square

La fel ca în cadrul Lemei A.2, am dovedit că există numărul $S = S(t)$ pentru care să aibă loc limitarea (A.3).

Conform (A.4), unde $\xi_i = \xi_i(\lambda_i)$ și $i \in \{1, 2\}$, realizăm că

$$\begin{aligned}
\bar{r}(t) - \bar{r}(s) &= C_1 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_1 s} \right) \bar{u}_1 + C_2 \left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_2 s} \right) \bar{u}_2 \\
&= C_1 e^{\lambda_1 t} \left[1 - e^{\lambda_1(s-t)} \right] \bar{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \left[1 - e^{\lambda_2(s-t)} \right] \bar{u}_2 \\
&= C_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 \xi_1(t-s)} \cdot \bar{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 \xi_2(t-s)} \cdot \bar{u}_2 \\
&= (t-s) \cdot C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(t+\xi_1)} \cdot \left[\bar{u}_1 + \frac{C_2 \lambda_2}{C_1 \lambda_1} e^{\lambda_2(t+\xi_2) - \lambda_1(t+\xi_1)} \cdot \bar{u}_2 \right],
\end{aligned}$$

respectiv, via (A.8),

$$|\bar{F}(t) - \bar{F}(s)| \geq |t - s| \cdot |C_1 \lambda_1| \cdot e^{-|\lambda_1| \cdot (2|t| + s(t))} \cdot \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\sqrt{1 + \lambda_2^2}}.$$

În concluzie,

$$L(t) = \frac{\sqrt{1 + \lambda_2^2}}{|C_1 \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)|} e^{|\lambda_1| (2|t| + s(t))}, \quad \delta(t) \in \left(0, \frac{r(t)}{2}\right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Estimarea (A.1) își păstrează valabilitatea în alte două situații: când ($\mathbf{trace} > 0$, $\mathbf{det} > 0$, $\mathbf{discr} > 0$) și în contextul Subsecțiunii 2.2.5.

Referințe Bibliografice

1. Abdeljawad, T.; Băleanu, D.; Jarad, F.; Mustafa, O.G.; Trujillo, J.J.: *A Fite type result for sequential fractional differential equations*. (2009)
<https://arxiv.org/abs/0904.1490v1>
2. Arnold, V.I.: *Ecuatii diferențiale ordinare*. Editura științifică și enciclopedică, București (1978)
3. Atkinson, K.E.; Han, W.; Stewart, D.: *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey (2009)
4. Bellman, R.: *Stability Theory of Differential Equations*. Dover Publications, Inc., New York (1969)
5. Extensiile fișierelor: *Common file name extensions in Windows*.
https://support.microsoft.com/en-us/windows/common-file-name-extensions-in-windows-da4a4430-8e76-89c5-59f7-1cdbbc75cb01#id0ebf=windows_11
6. Firefox, bancul de probă: *Playground* | MDN.
<https://developer.mozilla.org/en-US/play>
7. Firefox: *Firefox Browser. Take control of your internet*.
<https://www.firefox.com/en-US/>
8. Fite, W.B.: *Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **19**, 341-352 (1918)
9. Halanay, A.: *Ecuatii diferențiale*. Editura didactică și pedagogică, București (1972)
10. Inkscape: *INKSCAPE. Draw Freely*.
<https://inkscape.org/>
11. Ionescu, D.V.: *Ecuatii diferențiale și integrale*. Ediția a doua. Editura didactică și pedagogică, București (1972)
12. Meyer, O.: *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*. Editura Academiei Republicii Socialiste România, București (1981)
13. Mustafa, O.G.: *Elipsa. Formule, comentarii*. Editura Sitech, Craiova (2023)
<https://bit.ly/elipse2022>
14. Nicolescu, M.; Dinculeanu, N.; Marcus, S.: *Analiză matematică. Volumul I*. Ediția a treia. Editura didactică și pedagogică, București (1966)
15. NumPy: *Installing NumPy*.
<https://numpy.org/install/>
16. Python: *Documentație*.
<https://docs.python.org/ro/3.14/>
17. Python: *Python Releases for Windows. Stable Releases*. Download Windows installer (64-bit).
<https://www.python.org/downloads/windows/>

18. Răsvan, V.: *Teoria stabilității (Concepte. Metode. Aplicații)*. Editura științifică și enciclopedică, București (1987)
19. SVG, atribut: *SVG Attribute reference – SVG | MDN*. Presentation attributes.
https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/SVG/Reference/Attribute#presentation_attributes
20. SVG: *Introducing SVG from scratch – SVG | MDN*.
https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/SVG/Tutorials/SVG_from_scratch
21. SVG, obiect grafic: *<polyline>*.
<https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/SVG/Reference/Element/polyline>
22. SVG: *Scalable Vector Graphics (SVG) 2*. W3C Editor's Draft.
<https://w3c.github.io/svgwg/svg2-draft/>
23. Vrânceanu, G.: *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială*. Editura de stat didactică și pedagogică, București (1961)

Index

- autointersecțiile orbitei, 31
- baza reciprocă, 26
- cercul-unitate, \mathbb{S}^1 , 33
- chestiunea unicității, 7
- compacitatea orbitei, 31
- coordonata curbilinie, s, 60
- curba simplă, 59
- curbura cu semn, k_{1s} , 61
- defectul matricei, 11
- det**, 23
- discr**, 23
- disjuncția orbitelor, 30
- echilibrul, 30
- ecuația caracteristică, 11
- ecuația pendulului matematic, 32
- eroarea globală, $O(h^4)$, 70
- eroarea locală, $O(h^5)$, 70
- exponențiala matricei, 30
- focarul, echilibru, 57
- formula lui J. Liouville, 28
- interpolarea liniară, 71
- izomorfismul, 29
- multiplicitatea geometrică, 10
- nodul, echilibru, 57
- nodul, 65
- operatorul morsa, $:=$, 5
- ordinul metodei, 70
- planul fazelor, 32
- portretul fazelor, 31
- precizia dublă, 2^{-52} , 78
- proprietatea grupală, 28
- punctul-șa, echilibru, 57
- punctul singular, 30
- punctul staționar, 30
- punctul de aplicație, 59
- punctul fix, 30
- raza vectoare, 59
- razele conjugate, $\vec{w}_{1,2}$, 55
- rotația cu $\pm 90^\circ$, 58
- sensul de parcurs, 33
- sistemul de referință, 59
- sistemul în prima aproximație, 64
- sistemul liniarizat, 64
- stadiul, 65
- traietoria, 60
- transformarea punctuală, 29
- transpunerea \star^T , 2
- triunghiul negru, 33
- trace**, 23
- varietatea diferențială, 37
- vectorul-unitate, 60
- vectorul cu linie, 59
- vectorul cu săgeată, 59
- vectorul de poziție, 59
- versorul, 60